$n^p-(2p+1)n+3p$ が素数となるような
整数 n, 素数 p の組 (n,p) をすべて求めよ。

[解答]　フェルマーの小定理より任意の整数 n について $n^p\equiv n \pmod p$ である。
よって与式は

$$n^p-(2p+1)n+3p\equiv n-n\equiv 0 \pmod p$$

となる。つまり与式が素数となるときは, $n^p-(2p+1)n+3p=p$ のときと同値である。故に方程式 $n^p-(2p+1)n+2p=0$ を解けばよい。式を変形すると $n[n^{p-1}-(2p+1)]=-2p$ となり，p は素数なので，$n=\pm1,\pm2,\pm p,\pm 2p$ に絞られる。$n=1$ のとき，$1-(2p+1)+2p=0$ よって $n=1$ のときは任意の素数 p について条件を満たすので，解として $(n,p)=(1,q)$ (q は任意の素数) が得られる。$n=-1$ のとき，方程式は $4p+1+(-1)^p=0$ となるので，明らかに不適。
[1] $n=p$ のとき　方程式は $p^p=p(2p-1)$ と変形でき，$2p-1$ は p の倍数ではないことから，両辺の素因数 p の数に矛盾が生じる。よって解なし。
[2] $n=-p$ のとき　方程式は $p^p=p(2p+3)$ と変形でき，$p\neq 3$ のとき $2p+3$ は p の倍数ではないことから，両辺の素因数 p の数に矛盾が生じる。よって $p=3$ でなければならず，これは確かに方程式を満たすので，解 $(n,p)=(-3,3)$ が得られる。
[3] $n=2p$ のとき　方程式は $(2p)^p=(2p)^2$ と変形でき，素因数 p の個数を考えて，これを満たす p は $p=2$ のみ。よって解 $(n,p)=(4,2)$ が得られる。
[4] $n=-2p$ のとき　方程式は $(-2p)^p=-2p(2p+2)$ と変形でき，$p\neq 2$ のとき $2p+2$ は p の倍数ではないことから，両辺の素因数 p の数に矛盾が生じる。よって $p=2$ でなければならないが，これは方程式を満たさないので解なし。
[5] $n=2$ のとき　方程式は $2^{p-1}=(p-1)+2$ と変形できる。微分を用いることで $2^x>x+2\ \ (x\geq 3)$ となることがわかるので，$p-1<3$ となる必要があり $p=2,3$ と絞られる。それぞれ条件を満たすのか確認すると，解とし

て $(n,p)=(2,3)$ のみが得られることが分かる。
[6] $n=-2$ のとき　$p=2$ のときの解が $n=1,4$ と既に 2 つ得られており，$p=2$ のとき方程式は n についての 2 次方程式となるので，もう解を持つことはない。よって $p\neq 2$，すなわち p は奇素数としてよい。すると $n=-2$ より方程式は $2^p=6p+2$ と変形できる。微分を用いることで $2^x>6x+2\ \ (x\geq 6)$ となることがわかるので，$p<6$ となり $p=2,3,5$ と絞られる。$p=3$ の場合も既に 3 つの解が $n=1,2,-3$ が得られているので，$p=5$ の場合のみ調べればよく，解として $(n,p)=(-2,5)$ が得られることが分かる。
[1] $\sim$ [6] より求める解は
$(n,p)=(1,q),(4,2),(2,3),(-3,3),(-2,5)$　(q は任意の素数) である。　□

[別解]　$n=\pm1,\pm2,\pm p,\pm 2p$ と絞り込んだ後に，複雑だがもう少し解析的に解く方法もある。
$n=\pm1$ のときを同様に調べた後，$n=1$ で解を持つことから方程式の左辺を $n-1$ で割り算して，方程式を $n^{p-1}+n^{p-2}+\cdots+n-2p=0$ と変形することができることを利用する。
[1] $n>0$ のとき

$$n^{p-1}+n^{p-2}+\cdots+n-2p \geq n^{p-1}-2p$$

より，$0\geq n^{p-1}-2p$ である必要がある。そこで関数 $f(x)=n^{x-1}-2x$ を考える。$p\geq 2$ より $x\geq 2$ のときを考えればよい。$f(2)=n-4$ より，$n>4$ のときは $f(2)>0$ となることに注意しておく。$x\geq 2$ に注意して，$n>4$ のとき

$$\begin{aligned}
f'(x) &= n^{x-1}\log n-2\\
&> 4^{x-1}\log 4-2\\
&\geq 4\log 4-2\\
&= 2(2\log 4-1)\\
&> 0
\end{aligned}$$

ゆえに $n>4$ のときは $x\geq 2$ で $f'(x)>0$，そして $f(2)>0$ であるので，$f(x)>0\ \ (x\geq 2)$ である。つまり $n>4$ においては $0\geq n^{p-1}-2p$ は成り立たないので不適。これより $2\leq n\leq 4$ とわかり，解が $n=\pm1,\pm2,\pm p,\pm 2p$ に絞られていることを思い出すと，$n=3,4$ のときはそれぞれ $p=3,2$ となる必要があることがわかる。それぞれ代入して実際に条件を満たすことを確かめると，解として $(n,p)=(4,2)$ のみが得られることが分かる。$n=2$ のときは，もとの解法と同様にして，解として $(n,p)=(2,3)$ のみが得られることが分かる。以上より解として $(n,p)=(4,2),(2,3)$ が得られた。
[2] $n<0$ のとき
$p=2$ のときは, もとの方程式が n についての 2 次方程式となり, 既に 2 つの解 $n=1,4$ が得られている。よって $p=2$ のときはこれ以上解が存在しないので $p\neq 2$ としてもよく, このとき p は奇数になることに注意する。$N=-n$

とおくと $N>0$ で，方程式は p が奇数より $N^{p-1}-N^{p-2}+\cdots-N-2p=0$ と書き換えられる。ここで $N=1$ すなわち $n=-1$ のとき解なしなので，$N\geq 2$ としてもよい。このとき $N^{k+1}-N^k=N^k(N-1)>0$ （k は自然数）であることを利用すると，方程式の左辺は

$$
\begin{aligned}
&N^{p-1}-N^{p-2}+\cdots-N-2p\\
=&(N^{p-1}-N^{p-2})+(N^{p-3}-N^{p-4})+\cdots+(N^2-N)-2p\\
>&N^{p-1}-N^{p-2}-2p
\end{aligned}
$$

となるので，$0>N^{p-1}-N^{p-2}-2p$ が成り立つ必要がある。そこで関数 $g(x)=N^{x-1}-N^{x-2}-2x\ \ (x\geq 3)$ を考える。$g(3)=N(N-1)-6$ より，$N>3$ のときは $g(3)>0$ であることに注意しておく。$x\geq 3$ に注意して，$N>3$ のとき

$$
\begin{aligned}
g'(x)&=N^{x-1}\log N-N^{x-2}\log N-2\\
&=N^{x-2}(N-1)\log N-2\\
&>3(3-1)\log 3-2\\
&=2(3\log 3-2)\\
&>0
\end{aligned}
$$

ゆえに $N>3$ のときは $x\geq 3$ で $g'(x)>0$，そして $g(3)>0$ であるので，$g(x)>0\ \ (x\geq 3)$ である。つまり $N>3$ のときは，$0>N^{p-1}-N^{p-2}-2p$ は成り立たないので不適。これより $2\leq N\leq 3$ とわかり，解が $n=\pm 1,\pm 2,\pm p,\pm 2p$ に絞られていることを思い出すと，$N=3$ のときは $p=3$ となる必要があることがわかる。代入して条件を満たすのかを確かめると，実際満たすことが確かめられるので，解として $(n,p)=(-3,3)$ が得られる。残りは $N=2$ すなわち $n=-2$ のときである。もとの解法と同様にして解として $(n,p)=(-2,5)$ が得られる。以上より $n<0$ の場合を調べ終え，解として $(n,p)=(-3,3),(-2,5)$ が得られた。

[1][2] より求める解は

$(n,p)=(1,q),(4,2),(2,3),(-3,3),(-2,5)\ \ (q$ は任意の素数$)$ である。 □