

2.8.3

1つ N_1, N_2 は部分群に \cap する \Rightarrow 示す。

2つ N_1, N_2 は $N_1, N_2 \ni e$ 1) $N_1, N_2 \neq \emptyset$ は \Rightarrow 示す。

$x, y \in N_1 N_2 \Rightarrow xy^{-1} \in N_1 N_2$ であることを示す。

$x, y \in N_1 N_2$ より $\exists n_1, n'_1 \in N_1, n_2, n'_2 \in N_2$ である。

$x = n_1 n_2, y = n'_1 n'_2$ である。

よって $xy^{-1} = n_1 n_2 (n'_1 n'_2)^{-1}$
 $= n_1 n_2 n'_2{}^{-1} n'_1{}^{-1}$

よって N_2 は群より $n''_2 = n_2 n'_2{}^{-1} (n'_2 \in N_2)$ である。

$xy^{-1} = n_1 n''_2 n'_1{}^{-1}$
 $= (n_1 n'_1{}^{-1})(n'_1 n''_2 n'_1{}^{-1})$

N_2 は正規部分群より $n'_1 n''_2 n'_1{}^{-1} = n''_2 (n''_2 \in N_2)$

また N_1 は群より $n_1 n'_1{}^{-1} = n'_1 (n'_1 \in N_1)$ である。

よって $xy^{-1} = n'_1 n''_2$ であり $xy^{-1} \in N_1 N_2$ 。

ゆえに N_1, N_2 は部分群である。 ← この証明より N_1 と N_2 の \cap は $N_1 N_2$ の正規部分群であることがわかる。

次に N_1, N_2 は正規部分群であることを示す。

$h \in N_1 N_2, g \in G$ である $h = n_1 n_2 (n_1 \in N_1, n_2 \in N_2)$ である。

$ghg^{-1} = g n_1 n_2 g^{-1}$
 $= (g n_1 g^{-1})(g n_2 g^{-1})$

N_1, N_2 は正規部分群より $g n_1 g^{-1} = n'_1, g n_2 g^{-1} = n'_2$ である。

よって $n'_1 \in N_1, n'_2 \in N_2$ である。

$ghg^{-1} = n'_1 n'_2 \in N_1 N_2$

よって

$N_1 N_2 \triangleleft G$

(これは)