

4.6.2

$$G = \langle x, y \mid x^n = y^2 = 1, yxy = x^{-1} \rangle \text{ とおく.}$$

$$D_n \ni t, r \text{ により } t^n = 1, r^2 = 1, rtr = t^{-1} \text{ が成り立つ}$$

D_n は r, t で生成されるので、 G から D_n への全射準同型が存在する。

$$|D_n| = 2n \text{ である}$$

$$|G| \geq 2n \quad \text{①}$$

関係式より $x^{-1} = x^{n-1}$, $y^{-1} = y$ であるので、 G の元は x, y のみで現れ、 x^{-1}, y^{-1} は現れないので表される。
 $yxy = x^{-1} \iff yx = x^{n-1}y$ より

よって、 $yx \cdots$ という部分があれば yx を $x^{n-1}y$ で書きかえることができるので、

y の右に x が現れないようにすることができる。

すなわち、 $x^n = y^2 = 1$ であるので、 G の元は $x^i y^j$ ($i=0, 1, \dots, n-1, j=0, 1$) と表される。

$$|G| \leq 2n \quad \text{②}$$

$$\text{① と ② を合わせて } |G| = 2n = |D_n| \text{ である。}$$

全射準同型 $\rho: G \rightarrow D_n$ が存在するので、 $G \cong D_n$ である。