

4.S.3

(1) $|G| = pq$ かつ シロ- の定理から

$|H| = p, |K| = q$ かつ $p \nmid q-1$ かつ $q \nmid p-1$ ならば シロ- p , シロ- q 部分群が存在する。

$p \neq q$ かつ $p > q$ かつ $(p-1) \nmid (q-1)$ ならば 一般 性は 成り立たない。

シロ- p 部分群の数を S とすると $S \equiv 1 \pmod{p}$ である。

また $S = |G / N_G(H)|$ は $|G/H| = q$ の約数で、 q は素数だから $S = 1, q$

$p > q$ かつ $S \equiv 1 \pmod{p}$ である $T = q$ ならば $S = 1$ である必要がある。
よって、 K の共約は K のみである。

ゆえに

$$K \triangleleft G$$

これは

G が 単群であることと一致する。

(2) シロ- q 部分群の数を T とすると $T \equiv 1 \pmod{q}$ である。

また、 T は p の約数で、 p は素数だから

$$T = 1, p$$

$$p \not\equiv 1 \pmod{q} \text{ かつ}$$

$$(p-1) \nmid (q-1) \text{ であるならば } T = 1$$

ゆえに

$$H \triangleleft G$$

$|H \cap K|$ は $|H| = p, |K| = q$ の約数だから 1 である。

よって $H \cap K = \{1\}$ 。また $H, K \triangleleft G$ かつ HK は部分群。

$HK > H, K$ かつ $|HK|$ は p, q の公倍数で、 $|HK| \leq pq$ かつ $HK = G$ 。

命題 2.9.2 かつ

$$G \cong H \times K \cong \mathbb{Z}/p\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/q\mathbb{Z}$$

中国剰余定理から

$$G \cong \mathbb{Z}/pq\mathbb{Z}$$

$$\mathbb{Z}/pq\mathbb{Z} = \langle 1 \rangle \text{ かつ } \mathbb{Z}/pq\mathbb{Z} \text{ は巡回群である。}$$

$$H \cong \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$$

これは p の

素数だから

巡回群である。

これは q の

素数だから

巡回群である。

この瞬間

$H \times K$ が両方の正規部分

群である必然性が出てくる。

(3) $p > q$ かつ $n < 60$ かつ

$$q^2 < 60$$

q は素数だから

$$q = 2, 3, 5, 7$$

(i) $q = 2$ かつ

$$2 < p < 30$$

p は 2 の素数だから $p \equiv 1 \pmod{2}$ かつ 角群。

(ii) $q = 3$ かつ

$$3 < p < 20$$

$$p = 17, 11, 5$$

(iii) $q = 5$ かつ

$$5 < p < 12$$

$$p = 7$$

(iv) $q = 7$ かつ

$$7 < p < 9$$

角群。

(i) ~ (iv) かつ n は $n = 15, 33, 35, 51$

(1) である (2) には n に対して同様に範囲を絞って求める必要がある。

(1) である $T = 6$ かつ $n = 6, 10, 14, 15, 21, 22, 26, 33, 34$

$35, 38, 39, 46, 51, 55, 57, 58$