

2.10.1

写像  $\phi: \mathbb{C}^\times \rightarrow H_2$

$\varepsilon: x \in \mathbb{C}^\times$  に対し  $\phi(x) = |x|$  とおく。

これに  $H_2$  は乗法に閉群となる。そこで  $x, y \in \mathbb{C}^\times$  に対し

$$\begin{aligned}\phi(x)\phi(y) &= |x||y| \\ &= |xy| = \phi(xy) \quad //\end{aligned}$$

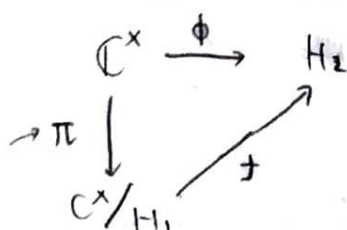
$\phi$  は準同型である。明らかに  $\phi$  は全射である。

また  $\ker \phi = \{x \in \mathbb{C}^\times \mid |x| = 1\} = H_1$  により準同型定理から

左の可換図式が成り立つ。よって同型写像が存在する。

$$H_2 \cong G/H_1 \quad \textcircled{1}$$

自然な写像



次に写像  $\phi': G \rightarrow \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$  をかく

$x \in G$  に対し  $\phi'(x) = \text{Arg } x + 2\pi\mathbb{Z} \in \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$  とおく。ただし  $0 \leq \text{Arg } x < 2\pi$  とおく。

$\mathbb{R}$  は加法に閉群である。  $\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$  は加法に閉群である。

$\mathbb{R} \supset 2\pi\mathbb{Z}$  かつ  $\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$  は群構造を持つ。別々に  $0 \leq \text{Arg } x < 2\pi$  とおく。  $\pi = \text{Arg } i$  に対し  $0 \leq \pi < 2\pi$  とおく。

$$\begin{aligned}x, y \in G \text{ に対し } \phi'(x) + \phi'(y) &= (\text{Arg } x + 2\pi\mathbb{Z}) + (\text{Arg } y + 2\pi\mathbb{Z}) \\ &= \{(\text{Arg } x + \text{Arg } y) + 2\pi\mathbb{Z}\} \quad \text{well-defined (i.e.) } 0 \leq \text{Arg } x + \text{Arg } y < 4\pi\end{aligned}$$

よって

$\theta_1 = \text{Arg } x, \theta_2 = \text{Arg } y$  とおくと  $0 \leq \theta_1 < 2\pi, 0 \leq \theta_2 < 2\pi$  である。

よって  $0 \leq \theta_1 + \theta_2 < 4\pi$  である。

(i)  $0 \leq \theta_1 + \theta_2 < 2\pi$  のとき 明らかに  $\text{Arg } x + \text{Arg } y = \text{Arg } xy$  である。

$$\begin{aligned}\phi'(x) + \phi'(y) &= \text{Arg } xy + 2\pi\mathbb{Z} \\ &= \phi'(xy) \quad \text{である。}\end{aligned}$$

(ii)  $2\pi \leq \theta_1 + \theta_2 < 4\pi$  のとき  $\text{Arg } x + \text{Arg } y = \text{Arg } xy - 2\pi$  である。

$$\begin{aligned}\phi'(x) + \phi'(y) &= (\text{Arg } xy - 2\pi) + 2\pi\mathbb{Z} \\ &= \text{Arg } xy + 2\pi\mathbb{Z} \\ &= \phi'(xy)\end{aligned}$$

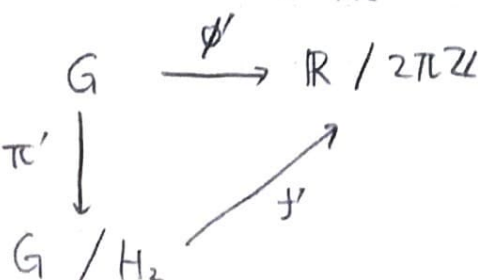
(i) (ii) より  $\phi'$  は群の準同型である。  $x \in G$  に対し 実数  $\alpha$  ( $0 \leq \alpha < 2\pi$ ) を用いて

$x = \cos \alpha + i \sin \alpha$  とおくと  $\phi'(x) = \alpha$  である。  $\phi'$  は全射である。

$$\begin{aligned}\text{よって } \ker \phi' &= \{x \in G \mid \phi'(x) = 2\pi\mathbb{Z}\} \\ &= \{x \in G \mid x \in H_2\} \\ &= H_2\end{aligned}$$

である。

自然な写像



よって準同型定理から左の可換図式が成り立つ。よって同型写像が存在する。

$$G/H_2 \cong \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$$