

4.5.7

(1) Σ - P 部分群の数を s とおくと

$$\Sigma\text{-の定理より} \quad s \equiv 1 \pmod{P}$$

また、 $|G/H| = q$ より s は q の約数であるので $s = 1, q$

$P > q$ より、これらの条件を満たすには $s = 1$ である必要がある。

$s = 1$ は $H \triangleleft G$ を意味するので、題意は示された。

(2) Σ - q 部分群の数を t とおくと Σ -の定理より $t \equiv 1 \pmod{q}$ であり

$$|G/K| = P^2 \text{ より } t \text{ は } P^2 \text{ の約数であるので } t = 1, P, P^2$$

K は正規部分群であるので $t = 1$ であり $P < q$ であるので、

これらの条件を満たすには $t = P^2$ である必要がある。

したがって、題意は示された。

(3) (1), (2) より $P < q$ であり K が正規部分群であるので、

H も正規部分群であることが示される。

$P < q$ であるので (1) より K の共役の数は P^2 である。

$|K| = q$ より K は巡回群であるので、異なる Σ - q 部分群は単位元の q (共通の元) を持たない。

ゆえに、 G の元のうち Σ - q 部分群に使われる数は

$$(q-1)P^2 \text{ である (単位元を除く)}$$

よって、使われる元の本数は $P^2q - (q-1)P^2 = P^2$ であり (単位元を含む)

元の位数の違いか、 Σ - P 部分群はこれらの元のみが使われる必要がある。

$|H| = P^2$ であるため、 Σ - P 部分群は1つのみである。

これは、

H が正規部分群であることを意味する

したがって

題意は示された。