

2.10.7

(1) $H \in \mathbb{Z}/12\mathbb{Z}$ の部分群と対応. ラグランジュの定理より

$$|(\mathbb{Z}/12\mathbb{Z})/H| = 1, 2, 3, 4, 6, 12. \quad \text{である.}$$

(i) $|(\mathbb{Z}/12\mathbb{Z})/H| = 1$ のとき. 明らかに $H = \mathbb{Z}/12\mathbb{Z}$

(ii) $|(\mathbb{Z}/12\mathbb{Z})/H| = 12$ のとき. 明らかに $H = \{0\}$ である.

(iii) $|(\mathbb{Z}/12\mathbb{Z})/H| = 2$ のとき. 問題 2.10.4 より $12\mathbb{Z}/12\mathbb{Z}$ と対応する.

$H = 2G$ ($G = \mathbb{Z}/12\mathbb{Z}$) と対応する (13)

定理 2.10.2, 第三同型定理より,

H は $G/2G$ の指数 2 の部分群と対応 (対応する).

よって, 中国剰余定理より $2G \cong (\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}) \times (\mathbb{Z}/4\mathbb{Z})$ である.

$G/2G \cong (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$

$\mathbb{Z}/12\mathbb{Z}$ の指数 2 の部分群は 明らかに $\{0\}$ のみである. ~~他の部分群は存在しない~~

よって H の数は 1.

$\pi^{-1}(2G) = H$

$2G = H$

$2\mathbb{Z}/12\mathbb{Z} = H$

$|(\mathbb{Z}/12\mathbb{Z})/H| = 3, 4, 6$ のときも (iii) と同様の手順で

それぞれ H の数は 1, 1, 1 である.

よって (i) ~ (iii) より 求める数は 6

$2\mathbb{Z}/12\mathbb{Z}$ $4\mathbb{Z}/12\mathbb{Z}$ $6\mathbb{Z}/12\mathbb{Z}$ と対応する.

(14) 求める部分群は $n\mathbb{Z}/12\mathbb{Z}$ ($n=1, 2, 3, 4, 6, 12$) である.

(2) (1) と同様にして $H \in \mathbb{Z}/18\mathbb{Z}$ の部分群と対応. $k = |(\mathbb{Z}/18\mathbb{Z})/H|$ と対応.

$k=1 \rightarrow H = \mathbb{Z}/18\mathbb{Z}$

$k=6 \rightarrow H = 6\mathbb{Z}/18\mathbb{Z}$

$k=2 \rightarrow H = 9\mathbb{Z}/18\mathbb{Z}$

$k=9 \rightarrow H = 2\mathbb{Z}/18\mathbb{Z}$

$k=3 \rightarrow H = 3\mathbb{Z}/18\mathbb{Z}$

$k=18 \rightarrow H = 1\mathbb{Z}/18\mathbb{Z}$

(17) 求める部分群は $n\mathbb{Z}/18\mathbb{Z}$ ($n=1, 2, 3, 6, 9, 18$)