

2.8.5

Hは四元数群と32元

$$|H| = 8 \quad (P31, 32 \text{ 等参照})$$

また Nは H の部分群と32元

$$|N| = 1, 2, 4, 8$$

Nは群より

$$|N| = 1 \Leftrightarrow N = \{1\}$$

$$|N| = 8 \Leftrightarrow N = H \quad \text{"}$$

 $\{1\}, H$ は正規部分群にたがってこの自明である。

ここで H の元 $1, -1, i, -i, j, -j, k, -k$ の位数は
左から順に $1, 2, 4, 4, 4, 4, 4, 4$ である。

(i) $|N| = 2$ のとき N の元の位数は 2 の約数より $N = \langle -1 \rangle$

(ii) $|N| = 4$ のとき N の元の位数は 2 の約数である。

$$i^2 = -1, i^4 = 1, j^2 = -1, j^4 = 1, k^2 = -1, k^4 = 1 \quad \text{であるので}$$

$$N = \langle i \rangle \quad \langle i \rangle \text{ が考えられる。}$$

同様に $\langle -i \rangle, \langle \pm j \rangle, \langle \pm k \rangle$ にもついても考えられる。

$$N = \langle i \rangle, \langle j \rangle, \langle k \rangle \quad \text{である。}$$

~~これは P32 の乗法表より正規部分群である。~~

(i) (ii) より

$$N = \langle -1 \rangle, \langle i \rangle, \langle j \rangle, \langle k \rangle, \{1\}, H \quad \text{であり}$$

の内正規部分群は $\{1\}, H$ である。

$$\text{正規部分群} \Leftrightarrow g \in G, h \in H \quad ghg^{-1} \in H$$

$$H = \langle i, j \rangle \text{ より } ihi^{-1} = jhj^{-1} \in \text{同群であることを示す。}$$

$$N = \langle -1 \rangle \text{ のとき}$$

$$i(-1)(-i) = (-i)(-i) = -1 \in \langle -1 \rangle \quad \text{OK}$$

$$j(-1)(-j) = (-j)(-j) = -1 \in \langle -1 \rangle \quad \text{OK}$$

$$N = \langle i \rangle$$

$$i i (-i) = -1 (-i) = i \in \langle i \rangle$$

$$j i (-j) = (-k) (-j) = -i \in \langle i \rangle$$

$$N = \langle j \rangle$$

$$i j (-i) = k (-i) = -j \in \langle j \rangle$$

$$j j j^{-1} = j \in \langle j \rangle$$

$$N = \langle k \rangle$$

$$i k (-i) = (-j) (-i) = -k \in \langle k \rangle$$

$$j k (-j) = i (-j) = -k \in \langle k \rangle$$

(2.6)より H の部分群が正規部分群である。