

OK ← 群論ノート上にはないので注意

4.5.2 (1) 位数2の部分群  $\Leftrightarrow$  元の位数が2の元の《《回群》  
 $\Leftrightarrow \langle \sigma^2 \rangle, \langle \tau \rangle, \langle \tau\sigma \rangle, \langle \tau\sigma^2 \rangle, \langle \tau\sigma^3 \rangle$

(2) 対  $\langle \sigma \rangle$  の軌道について.

単位元は共役作用で、単位元のままだから、 $\sigma$  の軌道を調べればよい.

$$0 \leq i \leq 3 \text{ について } \sigma^i \sigma^2 \sigma^{-i} = \sigma^2$$

$$\text{すなわち } \tau \sigma^2 \tau^{-1} = \sigma^{-2} = \sigma^2$$

これは  $\sigma^2$  は  $\tau, \sigma$  の作用により不変で、 $G$  の作用は  $\tau, \sigma$  の積にあて表されるので  $\langle \sigma^2 \rangle$  の軌道は  $\{\langle \sigma^2 \rangle\}$  となる.

次に  $\langle \tau \rangle$  の軌道について.

$$\sigma \tau \sigma^{-1} = (13) = \tau \sigma^2$$

$$\sigma^2 \tau \sigma^{-2} = \sigma(13)\sigma^{-1} = (24) = \tau$$

$$(\tau\sigma)\tau(\tau\sigma)^{-1} = \tau(13)\tau^{-1} = \tau\sigma^2$$

$$\tau\tau\tau^{-1} = \tau$$

よって  $\langle \tau \rangle$  の軌道は  $\{\langle \tau \rangle, \langle \tau\sigma^2 \rangle\}$  となる (証明略)

また、 $\langle \tau\sigma \rangle$  の軌道について.

$$\tau(\tau\sigma)\tau^{-1} = \tau(14)(23)\tau^{-1} = (12)(34) = \tau\sigma^3$$

よって  $\langle \tau\sigma \rangle$  の軌道は  $\{\langle \tau\sigma \rangle, \langle \tau\sigma^3 \rangle\}$  となる.

(3) 命題 4.1.23 より  $\langle \sigma^2 \rangle$  の安定化群は  $D_4$  となる.

また、 $\langle \tau \rangle$  の安定化群には (2.1) より明白に  $\tau, \sigma^2$  が含まれ、それ以外に 9 個の  
 $\langle \tau, \sigma^2 \rangle$  となる.

また、 $\langle \tau\sigma \rangle$  の安定化群の位数は 4 で.

$$\tau\sigma(\tau\sigma)(\tau\sigma)^{-1} = \tau\sigma$$

$$\sigma^2(\tau\sigma)\sigma^{-1} = \sigma^2(14)(23)\sigma^{-2}$$

$$= (32)(41)$$

$$= \tau\sigma$$

よって

$$\{1, \sigma^2, \tau\sigma, \tau\sigma^3\} = \langle \sigma^2, \tau\sigma \rangle \text{ となる}$$

※ 答えと積の順序が

逆のため.

角が異なる点.

その点、教科書の例

の解をみてはみる