

4.7.4 (1) 位数 8 の元を持つ群 G は巡回群に等しい。可換でない群は矛盾。

1.7 位数 8 の元を持つ群

(2) G は位数 4 の元を持つ群である。位数が 2 の元が存在しない。

ゆえに 演習 2.4.8 より可換群となす矛盾。

1.7 位数 4 の元を持つ

(3) $x \in G$ を位数 4 の元とし、 $y \in \langle x \rangle$ とする。

$|G/\langle x \rangle| = 2$ より $\langle x \rangle \triangleleft G$ かつ $yx y^{-1} = x^c$ ($c = 1, 2, 3$) とおける。

さらに y は 3 回共役作用をする。 $x = x^{c^4} \Leftrightarrow x^{c^4-1} = 1$

1.7 $c^4 - 1 \equiv 0 \pmod{4}$

これは満たすには $c = 1, 3$

$c = 1$ のとき、 $\langle x, y \rangle$ は少なくと $\{1, x, x^2, x^3, y\}$ の 5 つの異なる元を含む。 G の部分群だから $G = \langle x, y \rangle$ 。 $c = 1$ より $xy = yx$ が成り立つので、これは G が可換となり矛盾となる。 $c \neq 1$

ゆえに $c = 3$ とする。これは $yx y^{-1} = x^{-1}$ を意味する。

(i) y の位数が 2 のとき、 $x^4 = y^2 = 1$ 、 $yx y^{-1} = x^{-1}$ 、 $G = \langle x, y \rangle$ である。

演習 4.6.2 (ii) D_4 から G の全射準同型が存在する。

$|G| = |D_4| = 8$ より、これは同型となり $G \cong D_4$

(ii) y の位数が 4 のとき、 $x^c = y^j$ ($c, j = 1, 2, 3$) とおき、 $c \neq 1$ とする。

$1, x, x^2, x^3, y, y^2, y^3$ は相異なる 7 個の元となる。

$x^2 y, x y$ は残りの元となる (証明略)。これは $|G| = 8$ に矛盾する。

よって 少なくと $c = 3$ 、 $x^c = y^j$ が成り立つので c, j は存在する。

x, x^2, x^3, y, y^2, y^3 の位数に注目すると、 $x^c = y^j$ とおける。

$(c, j) = (1, 1), (1, 3), (2, 2), (3, 1), (3, 3)$ とおける必要がある。

$(c, j) = (1, 1)$ は明らかに不適。

$(c, j) = (1, 3)$ のとき $x = y^3 \Rightarrow x \cdot x = y^3 \cdot y^3 \Rightarrow x^2 = y^2$

$(c, j) = (2, 1), (3, 3)$ のときも同様になる。 $x^2 = y^2$ とおける。

結局この場合 $x^2 = y^2$ とおける。

よって $x^4 = y^4 = 1$ 、 $x^2 = y^2$ 、 $yx y^{-1} = x^{-1}$ 、 $G = \langle x, y \rangle$ である。

演習 4.6.7 (ii) 四元数群から G の全射準同型が存在する。

残りの位数が等しいので、これは同型となる。

G は四元数群と同型である。