

4.7.3

G の $10-3$, $10-13$ 部分群 S, T がある。 H, K とおく。

すなわち、その数 S がある S, T がある。 $10-1$ の定理より

$$S = 1, 13 \quad \text{かつ} \quad S \equiv 1 \pmod{3} \quad \text{より} \quad S = 1, 13.$$

$$T = 1, 3 \quad \text{かつ} \quad T \equiv 1 \pmod{13} \quad \text{より} \quad T = 1 \quad (\text{つまり } K \triangleleft G)$$

$$\therefore \text{ここで } S = 1 \text{ と仮定する。} \quad HK \supset H, K \text{ より} \quad |HK| \text{ は } 3, 13 \text{ の倍数である。}$$

$$|HK| \leq 39 \text{ より} \quad G = HK. \quad \text{また } |S| = |H \cap K| = \{1\}, \quad H, K \triangleleft G \text{ である。}$$

$$\text{命題 2.9.2 より} \quad G \cong H \times K \cong \mathbb{Z}/13\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/13\mathbb{Z}$$

これは G の非可換性に矛盾。

$$\text{よって} \quad S \neq 1 \quad \text{のとき} \quad S = 13$$

$$H = \langle h \rangle, \quad K = \langle k \rangle \quad \text{とある。} \quad h, k \neq 1 \quad \text{で} \quad k^{13} = h^{13} = 1$$

$$\text{さらに} \quad K \triangleleft G \text{ より} \quad hkh^{-1} = k^i \quad (i = 0, 1, \dots, 13) \quad \text{とある。}$$

この式にさらに h を 2 回共役作用させて

$$k = k^{i^2}$$

$$k^{i^2-1} = 1$$

$$i^2 - 1 \equiv 0 \pmod{13}$$

$$(i-1)(i+1) \equiv 0 \pmod{13}$$

$$i=1 \text{ とある。} \quad hk = kh \text{ で} \quad G = HK \text{ より} \quad G \text{ は可換になる。したがって矛盾。}$$

$$\text{よって} \quad i \neq 1 \text{ で}$$

$$i^2 + i + 1 \equiv 0$$

$$i^2 + i - 12 \equiv 0$$

$$(i-3)(i+4) \equiv 0$$

$$i = 3, 4.$$

$$i=4 \text{ のとき} \quad h^2 k h^{-2} = k^3 \text{ である。} \quad \text{このとき} \quad h \text{ の代わりには } h^2 \text{ を}$$

H の生成元としてとれば $i=3$ の場合にも帰着する。

$$i=3 \text{ のとき} \quad hkh^{-1} = k^3 \text{ である。} \quad G = HK \text{ より} \quad G = \langle h, k \rangle \text{ である。}$$

$$L = \langle x, y \mid x^{13} = y^{13} = 1, \quad yxy^{-1} = x^3 \rangle \text{ とある。}$$

L から G の全射準同型が存在する。

$$\therefore \text{ここで} \quad \text{演習 4.6.1 より} \quad |L| = |G| = 39 \text{ である。} \quad L \cong G.$$

(1) から、問題意は示された。