

4.5.5

シロ-2部分群, シロ-7部分群の数それぞれ s, t とおす.

シロ-7の定理 11 $s \equiv 1 \pmod{2} \quad t \equiv 1 \pmod{7}$

11. $|G/H| = 7, |G/K| = 8$ 11.

s は 7 の約数, t は 8 の約数 である $s = 1, 7, t = 1, 2, 4, 8$

これらの条件を満たす s, t は $s = 1, 7 \quad t = 1, 8$

$s \neq 1$ かつ $t \neq 1$ とおす. $s = 7, t = 8$

$t = 8$ より シロ-7部分群の数は 8 個ある.

7 は素数 11. それらは「巡回群である」. シロ-7部分群の間では

単位元以外に共通する元は持たない.

よって, G のうち シロ-7部分群のうちの一つに 含まれない単位元以外の元の個数は

$\text{部分群の数} \rightarrow 8(7-1) = 48 \text{ (個)}$

また, それぞれの位数が 7 であることに注目すると. 7 つの シロ-2部分群は

$|G| - 48 = 8 \text{ (個)}$ の元のみで構成されなければならない.

$|H| = 8$ 11. 8 個の元から シロ-2部分群のために使う元の選び方は.

つねに, 2 つの元を強いて 1 通り (かつ 2 通り). これは $s = 7$ に矛盾する.

もし 1 つしか
使えない

ゆえに $s = 1$ かつ $t = 1$ である.

これは H, K のどちらも正則部分群であることを表す.