

4.1.6

$$yxy^{-1} = x^3 \quad (1) \quad k \in \mathbb{N}: x^{3^k}$$

$$\begin{aligned} x^{3^k} &= (yxy^{-1})^k \\ &= \underbrace{(yxy^{-1})(yxy^{-1}) \cdots (yxy^{-1})}_{k \text{ 回}} \end{aligned}$$

$$= y \underbrace{x \cdot x \cdots x}_{k \text{ 回}} y^{-1}$$

$$= yx^k y^{-1}$$

よって

$$y^{100} x y^{-100}$$

$$= \underbrace{y \cdots y}_{99 \text{ 回}} y (yxy^{-1}) y^{-1} \underbrace{y^{-1} \cdots y^{-1}}_{99 \text{ 回}}$$

$$= \underbrace{y \cdots y}_{99 \text{ 回}} x^3 \underbrace{y^{-1} \cdots y^{-1}}_{99 \text{ 回}}$$

これを利用して

$$y^{100} x y^{-100} = x^{3^{100}}$$

よって

$$3^2 \equiv 2 \pmod{7} \quad (1)$$

$$3^6 \equiv 2^3 \equiv 1 \pmod{7} \quad 7 \text{ 割り切る}$$

$$3^{100} \equiv 3^4 \cdot 3^{6 \cdot 16} \equiv 3^4 \equiv 4 \pmod{7}$$

よって

$$y^{100} x y^{-100} = x^4$$

(2) (1) と同様にして

$$y^{1000} x y^{-1000} = x^{5^{1000}}$$

7 割り切るの定理より

$$5^6 \equiv 1 \pmod{7} \quad 7 \text{ 割り切る}$$

$$5^{1000} \equiv 5^4 \equiv 2 \pmod{7} \quad (1)$$

よって

$$x^{1000} x y^{-1000} = x^2$$