$\boxed{6.1.3}$ まず P243 の 不等式

$$d_\infty^{(n)}(x,y) \underset{①}{\leqq} d^{(n)}(x,y) \underset{②}{\leqq} d_1^{(n)}(x,y) \underset{③}{\leqq} n d_\infty^{(n)}(x,y)$$

について証明する

① について　$d_\infty^{(n)}(x,y) = \max\{|x_i - y_i| \mid i = 1, 2, \cdots, n\}$

の値を実現させるような i の1つを k とおくと

$$\begin{aligned} d_\infty^{(n)}(x,y) &= |x_k - y_k| \\ &= \sqrt{(x_k - y_k)^2} \\ &\leqq \sqrt{\sum_{i=1}^{n}(x_i - y_i)^2} \\ &= d^{(n)}(x,y) \end{aligned}$$

② について　$\{d_1^{(n)}(x,y)\}^2 - \{d^{(n)}(x,y)\}^2$

$$= \sum_{i=1}^{n}(x_i - y_i)^2 + \sum_{i \neq j}|x_i - y_i||x_j - y_j| - \sum_{i=1}^{n}(x_i - y_i)^2$$

$$= \sum_{i \neq j}|x_i - y_i||x_j - y_j|$$

$$\geqq 0$$

よって　$\{d_1^{(n)}(x,y)\}^2 \geqq \{d^{(n)}(x,y)\}^2$ で，$d_1^{(n)}(x,y) \geqq 0$，$d^{(n)}(x,y) \geqq 0$ より

$$d_1^{(n)}(x,y) \geqq d^{(n)}(x,y)$$

③ について，① と同様に　$d_\infty^{(n)}(x,y)$ を実現させるような i の1つを k とおくと．

$$\begin{aligned} d_1^{(n)}(x,y) &= \sum_{i=1}^{n}|x_i - y_i| \\ &\leqq \sum_{i=1}^{n}|x_k - y_k| \\ &= n|x_k - y_k| \\ &= d_\infty^{(n)}(x,y) \end{aligned}$$

これらの不等式を用いて，$d_1^{(n)}$，$d_\infty^{(n)}$ が $d^{(n)}$ と同値であることを示す．

(i) $d_1^{(n)}$ と $d^{(n)}$ について.　任意の正数 ε に対して. $d^{(n)}(x,y) \leqq d_1^{(n)}(x,y)$ より

$$d_1^{(n)}(x,a) < \varepsilon \Rightarrow d^{(n)}(x,a) < \varepsilon$$

※ a は $\mathbb{R}^n$ の任意の点とする.(以降も同様に使用)

また $d_\infty^{(n)}(x,y) \leqq d^{(n)}(x,y)$, $d_1^{(n)}(x,y) \leqq n d_\infty^{(n)}(x,y)$ より

$d_1^{(n)}(x,y) \leqq n d^{(n)}(x,y)$ より

$$d^{(n)}(x,a) < \frac{\varepsilon}{n} \Rightarrow d_1^{(n)}(x,a) < \varepsilon$$

したがって $d_1^{(n)}$ と $d^{(n)}$ は同値

(ii) $d_\infty^{(n)}$ と $d^{(n)}$ について　$d_\infty^{(n)}(x,y) \leqq d^{(n)}(x,y)$ より

$$d^{(n)}(x,a) < \varepsilon \Rightarrow d^{(n)}(x,a) < \varepsilon$$

また, $d^{(n)}(x,y) \leqq n d_\infty^{(n)}(x,y)$ より

$$d_\infty^{(n)}(x,y) < \frac{\varepsilon}{n} \Rightarrow d^{(n)}(x,y) < \varepsilon.$$

したがって $d_\infty^{(n)}$ と $d^{(n)}$ は同値