4.5.1

$A \in \mathfrak{A}_M$ をとってくると　そもそもの開集合の定義から　$A \subset M$

また　$M - A \in \mathfrak{D}_M$ より　　$M \cap A^c = M \cap O$　$(O \in \mathfrak{D})$ とかける

よって　　$M^c \cup A = M^c \cup O^c$

$O^c = A' \in \mathfrak{A}$ とおくと　　$M^c \cup A = M^c \cup A'$ …①

まず ①より　$M^c \cup A \supset A'$ なので

$$
\begin{aligned}
A' \cap M &\subset (M^c \cup A) \cap M \\
&= (M^c \cap M) \cap (A \cap M) \\
&= A \cap M \\
&= A
\end{aligned}
$$

$M^c \cap M = \phi$

$A \subset M$

よって　　$A' \cap M \subset A$

また　①より　　$M^c \cup A' \supset A$ なので

$$
\begin{aligned}
A &= A \cap M \\
&\subset (M^c \cup A') \cap M \\
&= A' \cap M
\end{aligned}
$$

($\because A \subset M$)

よって　　$A' \cap M \supset A$

ゆえに　　$A = A' \cap M$　$(A' \in \mathfrak{A})$ とかけるので

$\mathfrak{A}_M \subset \{A \cap M \mid A \in \mathfrak{A}\}$

逆に．　$A \cap M$　$(A \in \mathfrak{A})$ をとってくると

$$
\begin{aligned}
M - (A \cap M) &= M \cap (A \cap M)^c \\
&= M \cap (A^c \cup M^c) \\
&= M \cap A^c
\end{aligned}
$$

$A^c \in \mathfrak{D}$ なので．　$M - (A \cap M) \subset \mathfrak{D}_M$

よって　$\therefore A \cap M \in \mathfrak{A}_M$ より $\mathfrak{A}_M \supset \{A \cap M \mid A \in \mathfrak{A}\}$

したがって　$\mathfrak{A}_M = \{A \cap M \mid A \in \mathfrak{A}\}$ となる．

$V \cap M$　$(V \in \mathbf{V}(x))$ をとってくると

ある $O \in \mathfrak{D}$ が存在して　　$x \in O$，$O \subset V$ を満たす

よって　　$V \cap M \supset O \cap M \ni x$　となるので

$V \cap M \in \mathbf{V}_M(x)$ となり

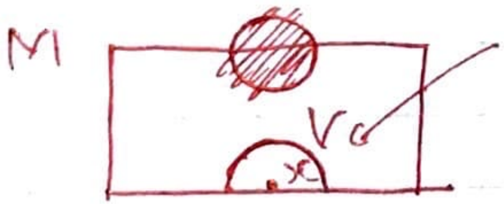
$\mathbf{V}_M(x) \supset \{V \cap M \mid V \in \mathbf{V}(x)\}$ である．

逆に　$V \in V_M(x)$ をとってくると $V_M(x)$ の定義より $V \subset M$ で、
ある $O \in \mathcal{O}$ が存在して　$x \in O \cap M$,　$O \cap M \subset V$
このとき、$O \cup V$ について考える。
$x \in O \cap M$ より $x \in O$ であり　$O \subset O \cup V$ なので、$O \cup V \in V(x)$ である。
そして、

$$
\begin{aligned}
&(O \cup V) \cap M \\
&= (O \cap M) \cup (V \cap M) && V \subset M \text{より} \\
&= (O \cap M) \cup V && O \cap M \subset V \text{より} \\
&= V
\end{aligned}
$$

つまり　$V = (O \cup V) \cap M$　$(O \cup V \in V(x))$
故に、$V_M(x) \subset \{V \cap M \mid V \in V(x)\}$ となり、
$V_M(x) = \{V \cap M \mid V \in V(x)\}$ である。

なぜこれを考えたのかというと



こういうイメージなので、
V をうまく拡張することで $V(x)$ に属するものを見つけることができたら ~~[illegible]~~ というものとの共通部分をとって $V = V' \cap M$ とできそうである。
手がかりなしに拡張するのは難しいので、とりあえず $O \cup V$ と拡張してみたら、うまく行った　「$\cup$」は拡張に非常に役立つ！
開集合の証明もそんなイメージ。