$\boxed{4.3.3}$ 「$\mathfrak{B}$が$\mathfrak{O}(\mathfrak{B})$の基底 $\Longleftrightarrow$ (O^*i), (O^*ii) が成り立つ」を示す

[I]「$\Rightarrow$」について　Sの任意の点xについて，Sは開集合なので，

仮定より　$S = \bigcup_{\lambda\in\Lambda} W_\lambda$　$(W_\lambda \in \mathfrak{B})$ と書ける

$x \in S$ より　$x \in W_\lambda$ となる $\lambda \in \Lambda$ が存在する。

ゆえに　(O^*i) は示された。

定理15より明らか

また，$W_1 \cap W_2 \neq \emptyset$ であるような $W_1, W_2 \in \mathfrak{B}$ をとってくる。

$W_1, W_2 \in \mathfrak{B} \subset \mathfrak{O}(\mathfrak{B})$ より　$W_1 \cap W_2 \in \mathfrak{O}(\mathfrak{B})$

$\mathfrak{B}$ は基底なので　$W_1 \cap W_2 = \bigcup_{\lambda\in\Lambda} W_\lambda$　$(W_\lambda \in \mathfrak{B})$ と書ける

よって　$x \in W_1 \cap W_2$ に対し　$x \in W_\lambda \subset W_1 \cap W_2$ であるような

$\lambda \in \Lambda$ が存在する

よって　(O^*ii) も示されたので，「$\Rightarrow$」は示された

[II]「$\Leftarrow$」について　問題設定より$\mathfrak{B}$は既に$\mathfrak{O}(\mathfrak{B})$の準基底であることに注意する

定理14より $\mathfrak{B}_0$ の任意の元が，$\mathfrak{B}$の元の和集合として

表されることを示せばよい

まず，特別な $S \in \mathfrak{B}_0$ について，(O^*i) より　Sの任意の点xに対して

$x \in W_x$ となるような $W_x \in \mathfrak{B}$ が存在するので

$S = \bigcup_{x\in S} W_x$　と書ける。

教科書の解答では$\mathfrak{B}$の和集合全体の集合は位相であり，その位相$\mathfrak{O}$が

よって　$S \in \mathfrak{B}$

次に，$B \in \mathfrak{B}_0$　$B \neq S$ について　$\mathfrak{B}_0$の定義から

$B = \bigcap_{i\in I} W_i$　$(W_i \in \mathfrak{B}$，Iは空でない有限集合$)$ と書ける

$B = \emptyset$ のとき　添え字集合が$\emptyset$である$\mathfrak{B}$の和集合とすればよい。明らかに$\mathfrak{O}(\mathfrak{B}) = \mathfrak{O}$

まず$|I| = 2$のときについて考える。先ほどの議論より　$B \neq \emptyset$ とする　であることを利用して示している。

このとき　(O^*ii) より　Bに属する任意の点xに対して

※$|I|=1$のときは自明なので省略

$x \in W_x$，$W \subset B$ となるような　$W_x \in \mathfrak{B}$ が存在するので

$B = \bigcup_{x\in B} W_x$　$(W_x \in \mathfrak{B})$ と書ける

$|I| = 3$のとき　$B = (W_1 \cap W_2) \cap W_3$ となり　$W_1 \cap W_2$ は上の議論より

$W_1 \cap W_2 = \bigcup_{\lambda\in\Lambda} W_\lambda$　$(\lambda \in \Lambda)$ とおけるので

$B = \left(\bigcup_{\lambda\in\Lambda} W_\lambda\right) \cap W_3$

$= \bigcup_{\lambda\in\Lambda} (W_\lambda \cap W_3)$

$|I|=2$のときより $W_\lambda \cap W_3 = \bigcup_{\mu\in M} W_{\lambda\mu}$ とおけ，　$B = \bigcup_{\lambda\in\Lambda}\bigcup_{\mu\in M} W_{\lambda\mu}$

以下同様にして　帰納的に，$\mathfrak{B}_0$のSでない元は，$\mathfrak{B}$の元の和集合として書ける

したがって　「$\Leftarrow$」は示された。