$\boxed{4.1.8}$ $O = (a_1 - \varepsilon', a_1 + \varepsilon') \times \cdots \times (a_n - \varepsilon', a_n + \varepsilon')$ とおき

$x = (x_1, x_2, \cdots, x_n) \in O$ をとると

各 i $(i = 1, 2, \cdots, n)$ について $a_i - \varepsilon' < x_i < a_i + \varepsilon'$

すなわち $|x_i - a_i| < \varepsilon'$

よって

$$d(a, x) = \sqrt{\sum_{i}^{n} (x_i - a_i)^2}$$

$$< \sqrt{\sum_{i}^{n} \varepsilon'^2}$$

$$= \sqrt{n \varepsilon'^2}$$

$$= \varepsilon$$ より $d(a, x) < \varepsilon$.

ゆえに $x \in B(a, \varepsilon)$ であるので $O \subset B(a; \varepsilon)$ である.

また $\mathbb{R}^n$ の開区間の全体を $\mathcal{B}$ とおくと.

$\mathbb{R}^n$ の任意の点 a と任意の正数 ε とに対し

$a \in O$, $O \subset B(a; \varepsilon)$

となる $\mathcal{B}$ の元 O が存在することが示されたので

$\mathcal{B}$ は $\mathfrak{O}(\mathbb{R}^n)$ の基底をなす