4.5.18 まず f は x_1 について連続であることを示す

つまり x_2 を固定して f を $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ の写像と見るのである

$x_2 = 0$ のとき $f(x_1) = 0$ となり定値写像なので連続

$x_2 \neq 0$ のとき $x_1^2 + x_2^2 \neq 0$ より

$f(x_1, x_2) = \frac{x_1 x_2}{x_1^2 + x_2^2}$ となり P180 定理 20 より

f は連続と言える

故に f は x_1 について連続と言えるが、x_2 についても同様に示せる。

次に $f: \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ が点 $(0, 0)$ で連続でないことを示す。

仮に $(0, 0)$ で連続だとすると、$\frac{1}{2}$ より小さい任意の正数 ε に対して、

$(0, 0)$ のある近傍 V が存在し、$x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ について、

$(x_1, x_2) \in V \Rightarrow |f(x_1, x_2) - f(0, 0)| = |f(x_1, x_2)| < \varepsilon$ となる。

ここで V は $(0, 0)$ の近傍なので $B((0, 0); \delta) \subset V$ となるような正数 δ が存在。

これで点 $\left(\sqrt{\frac{\delta}{2}}, \sqrt{\frac{\delta}{2}}\right) \in B((0, 0); \delta)$ を考えると

$\left(\sqrt{\frac{\delta}{2}}, \sqrt{\frac{\delta}{2}}\right) \neq (0, 0)$ より

$$f\left(\sqrt{\frac{\delta}{2}}, \sqrt{\frac{\delta}{2}}\right) = \frac{\frac{\delta}{2}}{\frac{\delta}{2} + \frac{\delta}{2}}$$

そもそも ε をこのとり方で $\frac{1}{2}$ より小さくしていた。

$= \frac{1}{2} > \varepsilon$ となり、

これは $\left(\sqrt{\frac{\delta}{2}}, \sqrt{\frac{\delta}{2}}\right) \in V \Rightarrow \left|f\left(\frac{\delta}{2}, \frac{\delta}{2}\right)\right| < \varepsilon$ に矛盾

したがって f は点 $(0, 0)$ で連続でない

教科書の解答は 定理 20 の (iii) を利用して解いている。

$\{(x_1, x_2) \mid |f(x_1, x_2) - f(0, 0)| < \frac{1}{2}\} = \{(0, 0)\} \cup \{(x_1, x_2) \mid x_1 \neq \pm x_2\}$

となるのは $(x_1, x_2) \neq (0, 0)$ のとき

$|f(x_1, x_2) - f(0, 0)| < \frac{1}{2}$

$\Leftrightarrow \frac{|x_1 x_2|}{x_1^2 + x_2^2} < \frac{1}{2}$

$\Leftrightarrow |x_1 x_2| < \frac{1}{2}(x_1^2 + x_2^2)$

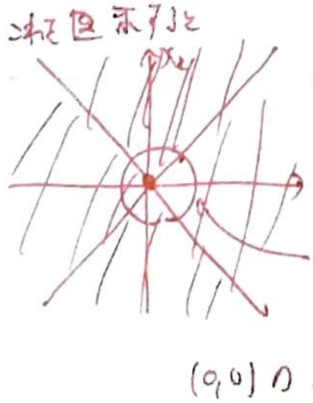
$\Leftrightarrow x_1^2 x_2^2 < \frac{1}{4}(x_1^2 + x_2^2)^2$

$\Leftrightarrow 0 < \frac{1}{4}(x_1^2 - x_2^2)^2$

$\Leftrightarrow x_1^2 \neq x_2^2$

$\Leftrightarrow x_1 \neq \pm x_2$ となるからである

これを図示すると



で直線 $x_1 = \pm x_2$ 上が x_1 スカスカなので、このように円を書いても必ずすき間が入りこむので、$(0, 0)$ の近傍ではない。