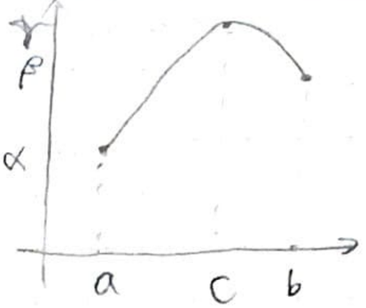
5.1.15 P201の定理7より、$\mathbb{R}$の部分空間で
$\mathbb{R}$と同相である可能性があるものは
$\mathbb{R}$自身、(a,b), $[a,b]$, (a,∞), $[a,\infty)$, $(a,b]$, $[a,b)$
$(-\infty,b)$, $(-\infty,b]$ に限られる。

まず $[a,b]$ と $\mathbb{R}$ が同相でないことを示す
仮に同相であるとすると 同相写像 $f: [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$
が存在する。 このとき、2点 a, b における f の値を
$f(a) = \alpha$, $f(b) = \beta$ とおくとする
明らかに $a \neq b$ なので、 f の単射性より $\alpha \neq \beta$
どちらの場合も証明は同じなので、とりあえず $\alpha < \beta$ とする。

このとき、f の全射性から $\gamma > \beta$ となる $\gamma \in \mathbb{R}$ に対応するような

$f(c) = \gamma$ $(c \in [a,b])$ が存在する。また、単射性より $c \neq a, b$

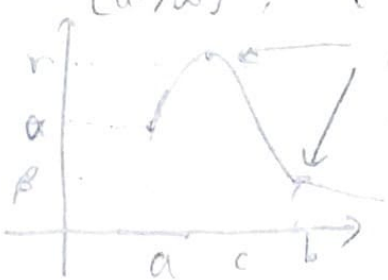
この◎が (a,b) が $[a,b]$ が で差が出るポイント



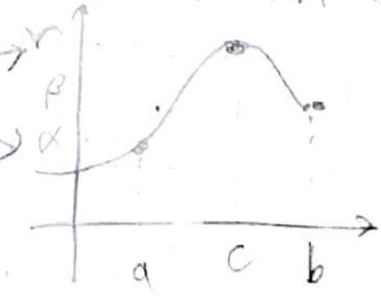
f の定義域を (c,b) に縮小して考えることで、
2点 c, b に対して中間値の定理より
$\beta < x < \gamma$ であるような
任意の x に対して $f(x') = x$ $(x' \in (c,b))$
となるような点 x' が存在する ①
同様に a, c に対しても、中間値の定理から
$\alpha < x < \gamma$ であるような

任意の x に対して、$f(y') = x$ $[y' \in (a,c)]$ となるような点 y' が存在する。②
よって $\beta < x < \gamma$ であるような x を1つ取ってくると、
それに対応した x' は①より $c < x' < b$
$\alpha < \beta < x < \gamma$ でそれに対応する y' は②より $a < y' < c$
これらは $y' < c < x'$ より $x' \neq y'$ であるが
$f(x') = f(y') = x$ であるので f の単射性に矛盾
したがって、$[a,b]$ と $\mathbb{R}$ は同相でない。

$(a,b]$, $[a,b)$
$[a,\infty)$, $(-\infty,b]$ についても同相でないことも同様に示せる



$[a,\infty)$ の場合



$(-\infty,b]$ の場合

後は $\mathbb{R} \simeq \mathbb{R}$ は自明なので. $\mathbb{R} \simeq (a,b)$, (a,∞), $(-\infty,b)$ を示せばよい.

写像 $f_1: \mathbb{R} \to (a,b)$ として. $f_1(x) = \dfrac{1}{a-x} + \dfrac{1}{b-x}$ を考えればよい.

写像 $f_2: (a,\infty) \to (a,b)$ として $f_2(x) = \dfrac{-a}{a-1-x} + b$ を考えればよい.

写像 $f_3: (-\infty,b) \to (a,b)$ として. $f_3(x) = \dfrac{b}{b+1-x} + a$ を考えればよい.

$\mathbb{R} \to (a,b)$ の同相は f_1 にて示されたので. f_2 により $(a,\infty) \simeq (a,b)$ を示すだけで十分である

したがって 題意は示された。

教科書の解答はこれと別解で楽

f_1 等のくわしい同相性の議論については.

問題4.5.8の自分の解答を参照