4.3.6　$A = \{B(x,\varepsilon) \mid \varepsilon \in \mathbb{R}, \varepsilon > 0\}$ とおいて、これが基本近傍系であることを示す。

$\forall V \in V(x)$ とすると、$x \in O$, $O \subset V$ となるような開集合 O が存在する

$x \in O$ より明らかに $O \neq \emptyset$ であり、O は開集合なので　$\mathbb{R}^n$ の開集合の定義より (P154)

x に対して、適当な正の数 ε をとって $B(x,\varepsilon) \subset O$ が成り立つ

よって　$A \ni B(x,\varepsilon) \subset O \subset V$ より題意は示された。

また仮に　$A = \{B(x,\varepsilon) \mid \varepsilon \in \mathbb{Q}, \varepsilon > 0\}$ だとしても

x に対して、ある $\varepsilon' > 0$ ($\varepsilon' \in \mathbb{R}$) が存在して　$B(x,\varepsilon') \subset O$ が成り立つ。

有理数の稠密性から、$0 < \varepsilon < \varepsilon'$ となる $\varepsilon \in \mathbb{Q}$ をとれ、

明らかに　$B(x,\varepsilon) \subset B(x,\varepsilon')$ なので、$B(x,\varepsilon) \subset O$ が成り立つ。

つまり、ε は有理数のみをとってもよい。

次に　$\mathcal{B}$ = {x を含む $\mathbb{R}^1$ の開区間の全体} とすると、

$\mathcal{B}$ が基本近傍系であることを示すが、$\mathbb{R}^1$ のときも $\mathbb{R}^n$ のときも議論は同じなので $\mathbb{R}^1$ で考える

さきほどと同様に　開集合 O が存在して、

x に対して、適当な正の数 ε をとって $B(x,\varepsilon) \subset O$ が成り立つ

ここで　$(x-\frac{\varepsilon}{2}, x+\frac{\varepsilon}{2}) \in \mathcal{B}$ をとると　明らかに

$(x-\frac{\varepsilon}{2}, x+\frac{\varepsilon}{2}) \subset B(x,\varepsilon)$

よって　$\mathcal{B} \ni (x-\frac{\varepsilon}{2}, x+\frac{\varepsilon}{2}) \subset V$ より題意は示された。

また、$\mathcal{B}$ = {x を含む $\mathbb{R}^n$ の開区間で端点は有理数であるものの全体} としても

先ほど示したことより x に対して　ある $\varepsilon' > 0$ ($\varepsilon' \in \mathbb{R}$) が存在して　$(x-\varepsilon', x+\varepsilon') \subset V$

ここで有理数の稠密性から　$x-\varepsilon' < q' < x < q < x+\varepsilon'$ となる $q, q' \in \mathbb{Q}$ が存在する。

$q = \min\{d(x,q), d(x,q')\}$ としても一般性は失われない。

よって　この q に対して、開集合 $(x-q, x+q) \in \mathcal{B}$ と定めると $(x-q, x+q) \subset V$

したがって　開集合の端点は有理数のみをとってもよい。