6.1.5 (a).

$a \in M^c \iff a \in M^{rac}$

$\iff a \notin M^{ra}$

$\iff a$ が M^c の任意の点列 (a_n) の極限点とならない ... (a i)

この同値関係の前提として ~~[illegible]~~ P239の定理2を使ったので $M^c \neq \phi$ すなわち $M \subsetneq S$ が必要とされると思うが $M = S$ でもいちおうこの同値は成立つので無視可

$\iff \lim_{n\to\infty} a_n = a$ となるこの任意の点列 (a_n) に対し、ある番号 n_0 が存在して、$n > n_0$ であるすべての n について $a_n \in M$ となる ... (a ii)

(a i) $\iff$ (a ii) の同値以外は自明なので

(a i) $\iff$ (a ii) のみ示す。

(a ii) $\Rightarrow$ (a i) について。仮に (a i) が成り立たないとすると M^c のある点列 (a_n) が存在して、

$\lim_{n\to\infty} a_n = a$ となる

(a ii) より ある番号 n_0 が存在し、$n > n_0$ であるすべての n について $a_n \in M$ となるが、これは $a_n \in M^c$ に矛盾する

(a i) $\Rightarrow$ (a ii) について。仮に (a ii) が成り立たないとすると、

$\lim_{n\to\infty} a_n = a$ なる S のある点列 (a_n) について

任意の番号 N に対し、$n_0 > N$ であるある番号 n_0 が存在して $a_{n_0} \in M^c$ となる。

よって この点列 (a_n) を利用し、~~[illegible]~~ 1に対し、$a_{n_1} \in M^c$ となるものを定め、次に n_1 に対し $a_{n_{n_1}} \in M^c$ となるものを定め…と順々に続けていくことで

~~$a_{n_0} \in M^c$ となるような a_{n_0} を1つ定めることで~~

(a_n) の部分列である M^c の点列 (a_{n_0}) を定める(選択公理使用?)

(a_{n_0}) は (a_n) の部分列なので $\lim_{n\to\infty} a_{n_0} = a$ となるが、

これは (a i) に矛盾する。

したがって (a i) $\iff$ (a ii) は示された

~~厳密に述べると、部分列とはなっていない。なぜなら (a_{n_0}) の添字が (a_n) の順序通りとは限らないからである。~~

~~しかし、$\lim_{n\to\infty} a_n = a$ となることはOK.~~

~~実際~~

~~$n \geqq N \Rightarrow |a_n - a| < \varepsilon$ より~~

~~$n_0 \geqq N \Rightarrow$~~

(b) aがMの集積点 $\iff$ $a \in \overline{M-\{a\}}$

$\iff$ aが $M-\{a\}$のある点列 (a_n) の極限点となる …(bi)

$\iff$ aがすべての $n \in \mathbb{N}$ に対し $a_n \neq a$ であるようなMの点列 (a_n) の極限点となる … (bii)

(bi) と (bii) の同値についてはただ言葉を言い換えただけなので

これにて証明終了

(c) $a \in M$が孤立点 $\iff$ aがMの集積点ではない

$\iff$ aがすべての $n \in \mathbb{N}$ に対し $a_n \neq a$ であるような Mの任意の点列 (a_n) の極限点とならない (ci)

$\iff$ aがMの点列 (a_n) の極限として表されるときは ある番号 n_0 が存在して $n > n_0$ であるすべてのnについて $a_n = a$となる (cii)

(ci) $\iff$ (cii) 以外は自明なので (ci) $\iff$ (cii) を示す。

(ci) $\Rightarrow$ (cii) について aがあるMの点列 (a_n) の極限として表される

すなわち $\lim_{n\to\infty} a_n = a$ とし、

このとき、任意の番号 n について、$n_0 > n$ であるあるn_0が存在して

$a_n \neq a$となるとする。

この点列 (a_n) を利用し、まず1に対し $a_{n_1} \neq a$ $(n_1 > 1)$ となるように

a_{n_1} を定める。次に n_1 に対し、$a_{n_2} \neq a$ $(n_2 > n_1)$ となるように

a_{n_2} を定める。これを順々に続けていくことで、(選択公理使用?)

aがすべての $n \in \mathbb{N}$ に対し $a_n \neq a$ であるようなMの点列 (a_{n_k}) が作られ

(a_{n_k}) は (a_n) の部分列なので $\lim_{k\to\infty} a_{n_k} = a$ となる。

これは (ci) に矛盾

(cii) $\Rightarrow$ (ci) について aがすべての $n \in \mathbb{N}$ に対し $a_n \neq a$ であるような

Mのある点列 (a_n) の極限となったとすると

(cii) より ある番号n_0が存在して、$n > n_0$ であるすべてのnについて $a_n = a$ と

ならねば、これは明らかに (a_n) の定義に矛盾

したがって 題意は示された