$\boxed{6.2.5}$ (a) $1,\ d(x,y) \geqq 0$ より $d''(x,y) \geqq 0$

$$d''(x,y) = 0 \iff d(x,y) = 0 \iff x = y$$

$d''(x,y) = d''(y,x)$ は明らか.

$$\begin{aligned} d''(x,z) &= \min\{1,\ d(x,z)\} \\ &\leqq \min\{1,\ d(x,y) + d(y,z)\} \quad d(x,z) \leqq d(x,y) + d(y,z) \text{ より} \\ &\leqq \min\{1,\ d(x,y)\} + \min\{1,\ d(y,z)\} \\ &= d''(x,y) + d''(y,z) \end{aligned}$$

ここの不等式は $\min\{1,\ d(x,y)+d(y,z)\}$ の値で場合分け

$1 \leqq d(x,y)+d(y,z)$ のときは $\min\{1, d(x,y)+d(y,z)\} = 1$ より $\min\{1, d(x,y)\}$, $\min\{1, d(y,z)\}$ のどちらかが 1より小さくなれど ~~[illegible]~~ 1を下回ることはないが.

したがって 題意は示された.

(b) d'' の定義より 任意の $x, y \in S$ に対して

$$d''(x,y) \leqq 1$$

よって

$$\delta''(S) \leqq 1$$

(c) 任意の正数 ε について.

そのときは $\min\{1, d(x,y)\} = d(x,y)$, $\min\{1, d(y,z)\} = d(y,z)$ となり 元の $1 \leqq d(x,y)+d(y,z)$ より 不等式を示せる.

$d''(x,y) = \min\{1,\ d(x,y)\} \leqq d(x,y)$ より

$$d(x_n, a) < \varepsilon \implies d''(x,y) < \varepsilon$$

また. $0 < \varepsilon \leqq 1$ のとき.

$$d''(x,a) < \varepsilon \implies d''(x,y) = d(x,y) < \varepsilon$$

~~[illegible]~~ $1 > d(x,y)+d(y,z)$ のときも同様に示せる.

そして $\varepsilon > 1$ のとき.

$$d''(x,y) < 1 \implies d(x,y) < 1 < \varepsilon$$

したがって 題意は示された.