$\boxed{4.5.3}$

XのMにおける閉包は次の3条件で特徴づけられる

(i) $X \subset \overline{X}_M$

(ii) $\overline{X}_M \in \mathfrak{A}_M$

(iii) $X \subset A,\ A \in \mathfrak{A}_M \Rightarrow \overline{X}_M \subset A$

ただし、XのMにおける閉包は $\overline{X}_M$ で表す。

よって、$\overline{X} \cap M$ がこの3条件を満たすことを確認すればよい

(i) について、$X \subset \overline{X}$、$X \subset M$ より $X \subset \overline{X} \cap M$

(ii) について $\overline{X} \in \mathfrak{A}$ であり、P189 (5.4) より

$$\overline{X} \cap M \in \mathfrak{A}_M$$

(iii) について、$X \subset A,\ A \in \mathfrak{A}_M$ とすると、

$A \in \mathfrak{A}_M$ より $A = A' \cap M$ $(A' \in \mathfrak{A})$ とおける。

このとき、$X \subset A = A' \cap M$ より $X \subset A'$ で $A' \in \mathfrak{A}$ であるので

$$\overline{X} \subset A'$$

よって $A = (A' \cap M) \supset (\overline{X} \cap M)$

したがって (i)〜(iii) の3条件が示されたので題意は示された。

解答は主に結局同値だが、「Xを含むような最小のMにおける閉集合」という定義の方向から攻めている。