$\boxed{4.4.2}$ まず「fが点x_0で連続

$\Longrightarrow$ $x_0 \in \overline{M}$ であるようなSの任意の部分集合Mに対して、$f(x_0) \in \overline{f(M)}$が成り立つ」

を背理法で示す

よって $x_0 \in \overline{M}$ であるようなSのある部分集合Mに対して、

$f(x_0) \notin \overline{f(M)}$ とする。

このとき 問題4.2.3より、 $f(x_0)$を含むある開集合$O' \in \mathfrak{O}'$に対して

$O' \cap f(M) = \phi$ となる。

故に $f^{-1}(O') \cap f^{-1} \circ f(M) = \phi$

$f^{-1}(f(M)) \supset M$ より $f^{-1}(O') \cap M = \phi$

$f^{-1}(O') \subset M^c$

ここで $O' \in V'(f(x_0))$ で fは連続より $f^{-1}(O') \in V(x_0)$

よって $x_0 \in O \subset f^{-1}(O)$ となるような $O \in \mathfrak{O}$ が存在するので

$x_0 \in O \subset M^c$

$x_0 \in O \subset M^{cc}$

$x_0 \in \overline{M}$

$x_0 \notin \overline{M}$

これは $x_0 \in \overline{M}$ に矛盾する。したがって $\Longrightarrow$ は示された。

次に $\Longleftarrow$ を示す。 $V' \in V(f(x_0))$ をとってくると

$f(x_0) \in O' \subset V'$ となるような $O' \in \mathfrak{O}'$ が存在する

このとき $f^{-1}(O')^{ca}$ について考える。 $x_0 \in f^{-1}(O')^{ca}$ とすると、

$x_0 \in f^{-1}(O'^c)^a$ より

仮定から $f(x_0) \in \{f \circ f^{-1}(O'^c)\}^a$

$f \circ f^{-1}(O'^c) \subset O'^c$ より $f(x_0) \in O'^{ca}$

$f(x_0) \in O'^{cc}$

$f(x_0) \in O'^c$

これは $f(x_0) \in O'$ に矛盾する。よって $x_0 \notin f^{-1}(O')^{ca}$

故に $x_0 \notin f^{-1}(O')^{cc}$

$x_0 \in f^{-1}(O')^i$ となり、

$x_0 \in f^{-1}(O')^i (\subset f^{-1}(O')) \subset f^{-1}(V')$ となるので

$f^{-1}(V') \in V(x_0)$

したがって $\Longleftarrow$ は示された。