$\boxed{4.1.5}$ ここでは M と $\overline{M}$ が一致する集合は閉集合であることを利用して、調べる

(i)′について $\mathbb{R}^{n\,a} = \mathbb{R}^{n\,ccc} = \phi^{cc} = \phi^{c} = \mathbb{R}^n$

$\phi^a = \phi^{ccc} = \mathbb{R}^{n\,cc} = \mathbb{R}^{n\,c} = \phi$

(ii)′について $A_1, A_2, \cdots, A_k \in \mathfrak{A}$ とすると

$A_1^a = A_1, A_2^a = A_2, \cdots, A_k^a = A$ であり

$(A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_k)^a = (A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_k)^{ccc}$

$= (A_1^c \cap A_2^c \cap \cdots \cap A_k^c)^{cc}$

$A_i^a = A_i \Leftrightarrow A_i^c = A_i^{cc}$ より A_i^c は開集合であるので

$= (A_1^c \cap A_2^c \cap \cdots \cap A_k^c)^c$

$= A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_k$

(iii)′について $(A_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ を $\mathfrak{A}$ の元からなる任意の集合族とすると

各 $\lambda \in \Lambda$ について $A_\lambda = A_\lambda^a \Leftrightarrow A_\lambda^c = A_\lambda^{cc}$ なので A_λ^c は開集合で

$$\left(\bigcap_{\lambda \in \Lambda} A_\lambda\right)^a = \left(\bigcap_{\lambda \in \Lambda} A_\lambda\right)^{ccc}$$

$$= \left(\bigcup_{\lambda \in \Lambda} A_\lambda^c\right)^{cc}$$

$$= \left(\bigcup_{\lambda \in \Lambda} A_\lambda^c\right)^{c}$$

$$= \bigcap_{\lambda \in \Lambda} A_\lambda$$

したがって 題意は示された。