4.1.1 $\mathbb{R}^n$の1個の点aからなる部分集合Aが閉集合であることを示せば、

それらの有限個の和集合も閉集合となるので(定理1 P146)

$A=\{a\}$が閉集合となることを示せばよい。

よって $A^c=\mathbb{R}^n-\{a\}$の任意の点xに対して適当な正数εをとれば、

$B(x;\varepsilon)\subset A^c$が成り立つことを示せばよい

$x\in A^c$とすると $x\neq a$であるので $d(a,x)>0$

実数の連続性より $d(a,x)>\varepsilon>0$となる正数εが存在する。

このεに対して $B(x;\varepsilon)$を定めて、

$x'\in B(x;\varepsilon)$に対して $d(x,x')<\varepsilon$であるので

εのとり方による

$$d(a,x')\geq d(a,x)-d(x,x')>d(a,x)-\varepsilon>0$$

$d(a,x')\neq 0$より $x'\in A^c$である。

ゆえに $B(x;\varepsilon)\subset A^c$が示された。

したがって題意は示された。