

4.3.1.

(i) 対し  $\mathcal{D}_1 \subseteq \mathcal{D}_2 \Rightarrow M^{\mathcal{D}_1} \subset M^{\mathcal{D}_2}$  を示す.

(HM)

任意の  $M \in \mathcal{B}(S)$  に対し  $M^{\mathcal{D}_1} \in \mathcal{D}_1$  なること  $\Rightarrow M^{\mathcal{D}_1} \in M^{\mathcal{D}_2}$

$\mathcal{D}_1 \subseteq \mathcal{D}_2$  より

$M^{\mathcal{D}_1} \in \mathcal{D}_2$

$M \supset M^c$

$M^{\mathcal{D}_1} \in \mathcal{D}_2$  より

$M^{\mathcal{D}_1, \mathcal{D}_2} = M^{\mathcal{D}_1}$

よって  $M^{\mathcal{D}_1} \subset M^{\mathcal{D}_2}$  には包含関係を保存するから

$M^{\mathcal{D}_1, \mathcal{D}_2} = M^{\mathcal{D}_1} \subset M^{\mathcal{D}_2}$

(証明終)

次に  $M^{\mathcal{D}_1} \subset M^{\mathcal{D}_2} \Rightarrow \mathcal{D}_1 \subseteq \mathcal{D}_2$  を示す.

$O_1 \in \mathcal{D}_1$  をとる.

$O_1^{\mathcal{D}_2} \subset O_1$  は明らか.

すなわち 仮定より

$O_1 = O_1^{\mathcal{D}_1} \subset O_1^{\mathcal{D}_2}$

よって

$O_1 = O_1^{\mathcal{D}_2}$  かつ  $O_1^{\mathcal{D}_2} \subset O_1$  より  $\mathcal{D}_2 \ni O_1$

ゆえに

$\mathcal{D}_1 \subseteq \mathcal{D}_2$

(証明終)

左から右へは明らか  
右から左へは逆転する  
これに注意 (厳密に示す)  
(分かった)

(ii) (ii)  $\Leftrightarrow$  (i) を示す.

$\forall M \in \mathcal{B}(S), M^{a_1} \supset M^{a_2}$

$\Leftrightarrow \forall M \in \mathcal{B}(S), M^{c a_1} \supset M^{c a_2}$

$\Leftrightarrow \forall M \in \mathcal{B}(S), M^{c a_1 c} \subset M^{c a_2 c}$

$\Leftrightarrow \forall M \in \mathcal{B}(S), M^{\mathcal{D}_1} \subset M^{\mathcal{D}_2}$

$\mathcal{D}_1 = c a_1 c$   
 $\mathcal{D}_2 = c a_2 c$  利用

(証明終)