4.3.2 まず $\mathcal{B}$ が $\mathfrak{O}$ の基底となる

$\Longrightarrow$ 任意の $O \in \mathfrak{O}$ 及び任意の $x \in O$ に対して

$x \in W,\ W \subset O$ となるような $W \in \mathcal{B}$ が存在する

ことを示す.

$\mathcal{B}$ は基底より $O \in \mathfrak{O}$ に対して,

$O = \bigcup_{\lambda \in \Lambda} W_\lambda$, $W_\lambda \in \mathcal{B}$ となるような

各 W_λ が存在し, 明らかに各 λ に対して $W_\lambda \subset O$

そして $O = \bigcup_{\lambda \in \Lambda} W_\lambda$ より $x \in O$ に対して少なくとも一つ,

$x \in W_\lambda$ となるような W_λ が存在する.

つまり, $O \in \mathfrak{O}$ 及び任意の $x \in O$ に対して

$x \in W_\lambda$, $W_\lambda \subset O$ となるような $W_\lambda \in \mathcal{B}$ が存在する.

次に, 任意の $O \in \mathfrak{O}$ 及び任意の $x \in O$ に対して

$x \in W$, $W \subset O$ となるような $W \in \mathcal{B}$ が存在する

$\Rightarrow$ $\mathcal{B}$ は O の基底となる ことを示す.

対応 $\Phi : O \to \mathcal{B}$ を, $x \in O$ に対して

$\Phi(x) = \{W \in \mathcal{B} \mid x \in W, W \subset O\}$ となるように定める

仮定より $\forall x \in O\ (\Phi_x \neq \emptyset)$ であるので 選択公理から

少なくとも一つ, O で定義された写像 W で,

$\forall x\,(W(x) \in \Phi_x)$ となるようなものが存在する.

本当にこの場面で選択公理を使う必要があるかは不明

よって, この写像を集合族として見て,

$\bigcup_{x \in O} W_x$ を定めることができる

各 W_x は元々の Φ の定め方より $W_x \subset O$ であるので $\bigcup_{x \in O} W_x \subset O$

また, $x \in O$ とすると, $x \in W_x \subset \bigcup_{x \in O} W_x$ より, $\bigcup_{x \in O} W_x \supset O$

ゆえに $O = \bigcup_{x \in O} W_x$.

$W_x \in \mathcal{B}$ より $\mathcal{B}$ は O の基底となる

以上より 題意は示された.