$\boxed{1.4.5}$ (a) $x \in f(A) - f(P)$ とおくと. 定義から $x \in f(A)$ かつ $x \notin f(P)$

$x \in f(A)$ より $\exists a \in A,\ x = f(a)$

$x \notin f(P)$ より $a \notin P$ であるので $\exists a \in A - P,\ x = f(a)$

よって $x \in f(A-P)$ となり

$f(A-P) \supset f(A) - f(P)$ を示せた.

(b) まずは考察を進める $x \in f(A-P)$ とすると

$\exists a \in A-P,\ x = f(a)$

$a \in A-P$ より $a \in A$ かつ $a \notin P$ であるため

$x \in f(A) - f(P)$ であるための条件 $x \in f(A)$ かつ $x \notin f(P)$ のうち

$x \in f(A)$ は満たしていることが分かる。

よって $x \in f(P)$ となるのはどのようなときかを考える.

それは $a \in A - P$ にもかかわらず. $x \in f(P)$ となるときなので.

$A = \{1, 0\}$ $P = \{0\}$ 写像 $f: A \ni a \to 0 \in A$ と定義すると.

$f(A-P) = \{0\}$ $f(A) - f(P) = \emptyset$ となり.

実際にありえることが分かる.

(c) (b)の議論より fが単射のとき. $x \notin f(P)$ を示せばよい

仮に $x \in f(P)$ とすると $\exists p \in P,\ x = f(p)$ となるが

$x \in f(A-P)$ より $\exists a \in A - P,\ x = f(a)$

$x = f(a) = f(p)$ で fは単射なので $a = p$

これは 左辺が Pの元ではなく, 右辺がPの元となり矛盾.

したがって 題意は示された.