4.2.2.

写像 $c: \mathfrak{P}(S) \to \mathfrak{P}(S)$ を、$M \in \mathfrak{P}(S)$ に対し $c(M) = M^c$ と定める。
このとき 合成写像 $i = c \circ a \circ c$ は 定理7の(Ii)−(Iiv)を満たすことを示す。

(Ii) について
$$
\begin{aligned}
i(S) &= S^{cac} \\
&= \phi^{ac} \\
&= \phi^{c} \qquad (\mathrm{Ki})\text{ より} \\
&= S
\end{aligned}
$$

(Iii) について (Kii) より
$$
\begin{aligned}
M^c &\subset M^{ca} \\
M^{cc} &\supset M^{cac} \\
M &\supset i(M)
\end{aligned}
$$

(Iiii) について (Kiii) より
$$
\begin{aligned}
i(M \cap N) &= (M \cap N)^{cac} \\
&= (M^c \cup N^c)^{ac} \qquad (\text{de Morgan}) \\
&= (M^{ca} \cup N^{ca})^{c} \qquad (\mathrm{Kiii})\text{ より} \\
&= M^{cac} \cup N^{cac} \qquad (\text{de Morgan}) \\
&= i(M) \cup i(N)
\end{aligned}
$$

(Iiv) について (Kiv) より
$$
\begin{aligned}
i \circ i(M) &= M^{cac \cdot cac} \\
&= M^{caac} \\
&= M^{cac} \qquad (\mathrm{Kiv})\text{ より} \\
&= i(M)
\end{aligned}
$$

よって i は定理7の条件を満たすので、
i が開核作用子となるような位相 $\mathfrak{O}$ が一意的に定まる。
c は a において一意的に定まるので a に対して位相 $\mathfrak{O}$ が一意的に定まる
また a がこの位相 $\mathfrak{O}$ の閉包作用子と一致することは次の3つの条件を示せばよい
$$
\begin{cases}
M \subset M^a & ① \\
M^a \in \mathfrak{A} & ② \\
A \in \mathfrak{A},\ M \subset A \Rightarrow M^a \subset A & ③
\end{cases}
$$
ただし 閉集合系 $\mathfrak{A}$ は $\mathfrak{A} = \{M \mid M \subset S,\ M^a = M\}$ となっていることに注意
① は (Kii) より従い ② は (Kiv) より従う
また ③ は
$$
\begin{aligned}
M \subset A \iff M \cup A &= A \quad \text{で} \\
(M \cup A)^a &= A^a \\
(\mathrm{Kiii})\text{ より} \qquad M^a \cup A^a &= A^a \\
A \in \mathfrak{A} \text{ より } A^a = A \text{ なので} \qquad M^a \cup A &= A \\
\iff M^a &\subset A
\end{aligned}
$$
したがって 題意は示された