$\boxed{6.5.1}$

(i) $d(x+z,\ y+z) = \|(x+z)-(y+z)\|$

$= \|x-y\|$

$= d(x,y)$

(ii) $d(\lambda x,\ \lambda y) = \|\lambda x - \lambda y\|$

$= \|\lambda(x-y)\|$

$= |\lambda|\,\|x-y\|$

$= |\lambda|\, d(x,y)$

また、(i),(ii)を満たす d が与えられているとき $\|x\| = d(0,x)$ で定められる $\|\ \|$ について、

$d(0,x) \geqq 0$ より $\|x\| \geqq 0$

$\|x\| = 0 \iff d(0,x) \iff x = 0$

$\|\lambda x\| = d(0,\lambda x) = |\lambda|\, d(0,x) = |\lambda|\,\|x\|$

(ii)より

$\|x+y\| = d(0,x+y)$

$= d(-x,y)$ ← (i)より

$\leqq d(-x,0) + d(0,y)$

$= d(0,x) + d(0,y)$ ← (ii)より ((i)でもよい)

$= \|x\| + \|y\|$

∴ したがって $\|\ \|$ は S 上のノルムとなり、このノルムから定められる距離関数 d' は $d'(x,y) = \|x-y\|$

$= d(0,x-y)$

$= d(y,x)$ ← (i)より

$= d(x,y)$ となり、

これはもとの d と一致する