$\boxed{4.1.3}$ まず 開区間 $O=(a_1,b_1)\times\cdots\times(a_n,b_n)$ が開集合であることを示す。

$O \ni x = (x_1, x_2, x_3, \cdots, x_n)$ とすると

各 $i=1,2,\cdots,n$ について、 $a_i < x_i < b_i$ である

よって $\varepsilon_{ai} = x_i - a_i$, $\varepsilon_{bi} = b_i - x_i$ とおくと

$\varepsilon_{ai}, \varepsilon_{bi} > 0$ である

そして $\varepsilon = \min\{\varepsilon_{a1}, \varepsilon_{a2}, \cdots \varepsilon_{an}, \varepsilon_{b1}, \cdots, \varepsilon_{bn}\}$ をとる。

$\varepsilon_{ai} > 0$, $\varepsilon_{bi} > 0$ より $\varepsilon > 0$ である。

これに対し、$B(x;\varepsilon)$ を考える。 $B(x;\varepsilon)$ の任意の元 x' をとると $d(x',x)<\varepsilon$

$x' = (x'_1, x'_2, \cdots, x'_n)$ とおくと $d(x',x)<\varepsilon$ より

$$\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(x'_i - x_i)^2} < \varepsilon$$

よって各 i について

$$\sqrt{(x'_i - x_i)^2} < \varepsilon$$

$$|x'_i - x_i| < \varepsilon$$

$$x_i - \varepsilon < x'_i < x_i + \varepsilon$$

$\varepsilon>0$ で $\varepsilon \leqq x_i - a_i,\ b_i - x_i$ より $\cancel{x_i} - (\cancel{x_i} - a_i) < x'_i < \cancel{x_i} + b_i \cancel{- x_i}$

$$a_i < x'_i < b_i$$

よって $x' \in O$

つまり $B(x,\varepsilon) \subset O$

したがって O は開集合。

次に 閉区間 $A=[a_1,b_1]\times\cdots\times[a_n,b_n]$ が閉集合であることを示す。

$A^c \ni x = (x_1, x_2, \cdots, x_n)$ とすると

各 $i=1,2,\cdots,n$ について $\underline{x_i < a_i \text{ または } x_i > b_i}$

ここの「または」は、$a_i<b_i$より、どちらか一方のみが成り立つという意味

よって $\varepsilon_i = \max\{a_i - x_i, x_i - b_i\}$ とおくと $\varepsilon_i > 0$ で

ただしどちらかは0より大きく どちらかは0より小さいが

そして $\varepsilon = \min\{\varepsilon_1, \varepsilon_2, \cdots, \varepsilon_n\}$ をとる。

$\varepsilon_i > 0$ より $\varepsilon > 0$ である

これに対し、$B(x;\varepsilon)$ を考え、$B(x;\varepsilon)$ の任意の元 x' をとると $d(x';x)<\varepsilon$

$x' = (x'_1, \cdots, x'_n)$ とおくと $d(x',x)<\varepsilon$ より

各 i について $x_i - \varepsilon < x'_i < x_i + \varepsilon$

$\varepsilon \leqq \varepsilon_i$ より $x_i - \varepsilon_i < x'_i < x_i + \varepsilon_i$

一致するではなく、どちらかで言える

ε_i の定義より $\underline{\varepsilon_i = a_i - x_i,\ x_i - b_i \text{ のどちらかである}}$

$\varepsilon_i = a_i - x_i$ のとき、 $x'_i < x_i + \varepsilon_i = a_i$

$\varepsilon_i = x_i - b_i$ のとき $x_i - \varepsilon_i = b_i < x'_i$

よって どうように せよ. $x_i' \in A^c$

つまり $B(x_i, \varepsilon) \subset A^c$

したがって A は 閉集合 である.