Sを問題の性質を満たす空間とし、Mをその部分空間とする。

$\boxed{5.3.6}$ (i) T_1-空間　$x \in M$ をとると、$\{x\}$ は S の閉集合より

$\{x\} = \{x\} \cap M$ は M の閉集合となり、$(T_1)''$ により題意は示された。

(ii) Hausdorff 空間　$x \neq y$ を満たす任意の $x, y \in M$ とすると

S は Hausdorff 空間なので、$U \cap V = \phi$ となる $U \in V_S(x)$, $V \in V_S(y)$

が存在する。よって $(M \cap U) \cap (M \cup V) = \phi$ となる $M \cap U \in V_M(x)$, $M \cap V \in V_S(y)$

が存在する。したがって題意は示された

(iii) 正則空間　条件 (T_1) は (i) により部分空間にも引き継がれることが分かるので、条件 (T_3) が引き継がれることのみ示せばよい。

$x \notin A_M$ であるような M の任意の点 x および、M の閉集合 A_M について考える。

$A_M = A \cap M$ $(A \in \mathfrak{A})$ と書け、この A は x を含まない。なぜなら

$x \in A$ とすると $A \cap M \ni x$ となり $A_M \not\ni x$ に矛盾するからである。

よって S は正則空間なので、$x \in O_1$, $A \subset O_2$, $O_1 \cap O_2 = \phi$ となる

$O_1, O_2 \in \mathfrak{O}_S$ が存在する

これより $x \in O_1 \cap M$, $A_M = A \cap M \subset M \cap O_2$, $(M \cap O_1) \cap (M \cap O_2) = \phi$ となる

$M \cap O_1$, $M \cap O_2 \in \mathfrak{O}_M$ が存在する。

したがって　題意は示された。

(iv) 完全正則空間　これも (iii) と同様、(T^*) が引き継がれることのみ示せばよい

A_M を M の任意の閉集合、x_0 を A に含まれない S の任意の1点とする。

$A_M = A \cap M$, $(A \in \mathfrak{O}_S)$ と書け、S は位相空間なので

$(i)_S$　$f(x_0) = 0$　$\Rightarrow$ $(i)_M$ $f|M(x_0) = 0$

$(ii)_S$　任意の $x \in A$ に対して $f(x) = 1$　$\Rightarrow$ $(ii)_M$ 任意の $x \in A_M$ に対して

$(iii)_S$　任意の $x \in S$ に対して $0 \leq f(x) \leq 1$　$f|_M(x) = 1$

$\Rightarrow (iii)_M$ 任意の $x \in M$ に対して $0 \leq f|M(x) \leq 1$

したがって　題意は示された。

※ この問題の教科書の注意について、正規空間の部分空間が正規空間となることを証明できないのは $M \cap A_1$, $M \cap A_2 \in \mathfrak{A}_M$ について

「$M \cap A_1 \cap A_2 = \phi \Rightarrow A_1 \cap A_2 = \phi$」が成り立たないため

Sの正規空間の条件を生かせないからである