$\boxed{5.3.5}$ 「正規空間 $\Rightarrow$ 完全正則空間」であることは
Urysohnの補題より従うことが分かる.
よって「完全正則空間 $\Rightarrow$ 正則空間」であることを示す.
$x \notin A$ であるような S の任意の点 x_0 と閉集合 A をとってくる.
このとき (T^*) より (i) $f(x_0) = 0$
(ii) 任意の $x \in A$ に対して $f(x_0) = 1$
(iii) 任意の $x \in S$ に対して $0 \leqq f(x) \leqq 1$
の3つの条件を満たすような実連続関数 $f : S \to \mathbb{R}$ が存在する.
$(-\infty, \frac{1}{2})$ と $(\frac{1}{2}, \infty)$ は $\mathbb{R}$ の開集合なので.
$f^{-1}((-\infty, \frac{1}{2}))$, $f^{-1}((\frac{1}{2}, \infty))$ は S の開集合で.
(i), (ii) より $x_0 \in f^{-1}((-\infty, \frac{1}{2}))$, $A \subset f^{-1}((\frac{1}{2}, \infty))$
また $(-\infty, \frac{1}{2}) \cap (\frac{1}{2}, \infty) = \phi$ より $f^{-1}((-\infty, \frac{1}{2})) \cap f^{-1}((\frac{1}{2}, \infty)) = \phi$
したがって 題意は示された.