$\boxed{4.3.8}$ (3.5) $\mathcal{V}(x) = \{V \mid \exists U \in \mathcal{V}^*(x)\ (U \subset V)\}$とすると

(Vi) $V \in \mathcal{V}(x)$について. $\exists U \in \mathcal{V}^*(x)\ (U \subset V)$

ここで(V*i)より $x \in U \subset V$ よって(Vi)は示された.

(Vii) $V \in \mathcal{V}(x)$について. $V \subset V'$ $(V' \in \mathfrak{P}(S))$とすると.

$V \in \mathcal{V}(x)$より $\exists U \in \mathcal{V}^*(x)\ (U \subset V)$

$V \subset V'$より $\exists U \in \mathcal{V}^*(x)\ (U \subset V')$

よって $V' \in \mathcal{V}(x)$

(Viii) $V_1 \in \mathcal{V}(x)$ $V_2 \in \mathcal{V}(x)$ なら.

$\exists U_1 \in \mathcal{V}^*(x)\ (U_1 \subset V_1)$ かつ $\exists U_2 \in \mathcal{V}^*(x)\ (U_2 \subset V_2)$

$\exists U_1, \exists U_2 \in \mathcal{V}^*(x)\ (U_1 \cap U_2 \subset V_1 \cap V_2)$

(V*ii)より $U_3 \subset U_1 \cap U_2$となるような $U_3 \in \mathcal{V}^*(x)$が存在するので.

$\exists U_3 \in \mathcal{V}^*(x)\ (U \subset V_1 \cap V_2)$

よって $V_1 \cap V_2 \subset \mathcal{V}(x)$

(Viv) $V \in \mathcal{V}(x)$をとってくると. $\exists U \in \mathcal{V}^*(x)\ (U \in V)$

(V*iii)より Uに対して. 次の条件を満たす. $W \in \mathcal{V}^*(x)$がある

条件: Wの任意の点yに対して $U_y \subset U$ となるような $U_y \in \mathcal{V}^*(y)$が存在する

$U \subset V$より, Wの任意の点yに対して. $U_y \subset V$ となるような $U_y \in \mathcal{V}^*(y)$が存在する.

つまり 〃 $V \in \mathcal{V}(y)$

$W \in \mathcal{V}^*(x)$ は $W \in \mathcal{V}(x)$とみなせることに注意すると. (Viv)は示された.

よって定理11 (p162)より. $\mathcal{V}(x)$を

xの近傍系とする位相$\mathfrak{O}$が一意的に定まることが分かる.