$\boxed{6.1.10}$

(a_n), (b_n) は収束点列より $\lim_{n\to\infty} a_n = \alpha$, $\lim_{n\to\infty} b_n = \beta$ $(\alpha, \beta \in S)$ とおける

よって $\lim_{n\to\infty} d(a_n, b_n) = d(\alpha, \beta)$ を示せばよい.

$\lim_{n\to\infty} a_n = \alpha$, $\lim_{n\to\infty} b_n = \beta$ より. 任意の ε に対して

ある自然数 N_1, N_2 が存在し 任意の n について

$$n \geqq N_1 \Longrightarrow d(a_n, \alpha) < \frac{\varepsilon}{2}$$

$$n \geqq N_2 \Longrightarrow d(b_n, \beta) < \frac{\varepsilon}{2}$$ が成り立つ

よって $N = \{N_1, N_2\}$ とおくと. $n \geqq N$ のとき.

$$
\begin{aligned}
&|d(a_n, b_n) - d(\alpha, \beta)| \\
&= |d(a_n, b_n) + d(a_n, \beta) - d(a_n, \beta) - d(\alpha, \beta)| \\
&= |\{d(a_n, b_n) - d(a_n, \beta)\} + \{d(a_n, \beta) - d(\alpha, \beta)\}| \\
&\leqq |d(a_n, b_n) - d(a_n, \beta)| + |d(a_n, \beta) - d(\alpha, \beta)| \\
&\leqq d(b_n, \beta) + d(a_n, \alpha) \\
&< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} \\
&= \varepsilon.
\end{aligned}
$$

ここはRにおける三角不等式 →

ここはdの性質における三角不等式 →

これより

$n \geqq N \Longrightarrow |d(a_n, b_n) - d(\alpha, \beta)| < \varepsilon$ が成り立つので

$$\lim_{n\to\infty} d(a_n, b_n) = d(\alpha, \beta)$$

そして, このことは d が $S \times S$ から距離空間 $\mathbb{R}$ への連続写像であることを表すので, 題意は示された.

補足. P240の定理3の(ii)の条件を使っており,

$\lim_{n\to\infty} (a_n^{(1)}, a_n^{(2)}) = (a^{(1)}, a^{(1)})$ であるならば

$S \times S$ の任意の点列をとってくると, 前問より $\lim_{n\to\infty} a_n^{(1)} = a$, $\lim_{n\to\infty} a_n^{(2)} = a^{(2)}$

となるので, 直前に示したことが使え, d が連続関数だと分かる