$\boxed{6.1.9}$ まず ($\Rightarrow$) について. $a_n = (a_n^{(1)}, a_n^{(2)})$, $a = (a^{(1)}, a^{(2)})$ とおくと.

$$\lim_{n\to\infty} (a_n^{(1)}, a_n^{(2)}) = (a^{(1)}, a^{(2)}) \quad より$$

任意の正数 ε に対して. ある自然数 N が存在し.

任意の自然数 n について

$$n \geq N \Rightarrow d(a_n, a) < \varepsilon \quad となる$$

$n \geq N$ のとき. $d(a_n, a) < \varepsilon$ より

$$\sqrt{\{d_1(a_n^{(1)}, a^{(1)})\}^2 + \{d_2(a_n^{(2)}, a^{(2)})\}^2} < \varepsilon$$

で.

$$d_1(a_n^{(1)}, a^{(1)}) < \varepsilon, \quad d_2(a_n^{(2)}, a^{(2)}) < \varepsilon \quad が成り立つ$$

つまり

$$n \geq N \Rightarrow d_1(a_n^{(1)}, a^{(1)}) < \varepsilon, \quad d_2(a_n^{(2)}, a^{(2)}) < \varepsilon$$

よって

$$\lim_{n\to\infty} a_n^{(1)} = a^{(1)}, \quad \lim_{n\to\infty} a_n^{(2)} = a^{(2)}$$

次に ($\Leftarrow$) について $\lim_{n\to\infty} a_n^{(1)} = a^{(1)}$, $\lim_{n\to\infty} a_n^{(2)} = a^{(2)}$ より

任意の正数 ε に対して. ある自然数 N_1, N_2 が存在し.

任意の自然数 n について.

$$n \geq N_1 \Rightarrow d_1(a_n^{(1)}, a^{(1)}) < \frac{\varepsilon}{\sqrt{2}}$$

$$n \geq N_2 \Rightarrow d_2(a_n^{(2)}, a^{(2)}) < \frac{\varepsilon}{\sqrt{2}} \quad が成り立つ.$$

よって $N = \max\{N_1, N_2\}$ とすると.

$n \geq N$ のとき. $d_1(a_n^{(1)}, a^{(1)}) < \frac{\varepsilon}{\sqrt{2}}$, $d_2(a_n^{(2)}, a^{(2)}) < \frac{\varepsilon}{\sqrt{2}}$ より

$$d(a_n, a) = \sqrt{\{d_1(a_n^{(1)}, a^{(1)})\}^2 + \{d_2(a_n^{(2)}, a^{(2)})\}^2}$$

$$< \sqrt{\frac{\varepsilon^2}{2} + \frac{\varepsilon^2}{2}}$$

$$= \varepsilon$$

すなわち.

$$n \geq N \Rightarrow d(a_n, a) < \varepsilon$$

したがって

$$\lim_{n\to\infty} a_n = a$$