$\boxed{4.4.7}$ P175 定理18より $f$は同相写像

$\Leftrightarrow$ 「$O \in \mathfrak{D} \Leftrightarrow f(O) \in \mathfrak{D}'$」

$\Leftrightarrow$ 「$A \in \mathfrak{A} \Leftrightarrow f(A) \in \mathfrak{A}'$」

$\Leftrightarrow$ 「$V \in V_S(x) \Leftrightarrow f(V) \in V_{S'}(f(x))$」

となり、(4.12), (4.13) は自明.

問題文より $f$は全単射であることを前提にしていることに注意.

(4.14) について. $f$を同相写像とすると. $M^\circ$は開集合より

$f(M^\circ)$は開集合. また $M^\circ \subset M$ なので

$$f(M^\circ) \subset f(M)$$

よって

$$f(M^\circ) \subset (f(M))^\circ$$

また. $(f(M))^\circ$ は開集合より $f^{-1}((f(M))^\circ)$ も開集合で

$(f(M))^\circ \subset f(M)$ より $f^{-1}(f(M))^\circ \subset M$

よって

$$f^{-1}((f(M))^\circ) \subset M^\circ = f^{-1} \cdot f(M^\circ)$$

$$(f(M))^\circ \subset f(M^\circ)$$

ゆえに

$$f(M^\circ) = (f(M))^\circ$$

逆に $f(M^\circ) = (f(M))^\circ$ が成り立つとする.

Sの任意の点$x$について. $V \in V_S(x)$ とすると

$\Leftrightarrow \quad x \in V^\circ$

$\Leftrightarrow \quad f(x) \in f(V^\circ)$ ※ $f$は全単射.

$\Rightarrow \quad f(x) \in f(V)^\circ$

$\Leftrightarrow \quad f(V) \in V_{S'}(f(x))$

したがって (4.14)は示された.

(4.15) について. 問題 4.4.3 より.

$f$は同相写像.

$\Leftrightarrow$ Sの任意の部分集合Mに対して $f(\overline{M}) \subset \overline{f(M)}$ かつ

S'の任意の部分集合M'に対して. $f^{-1}(\overline{M'}) \subset \overline{f^{-1}(M')}$

$\Leftrightarrow \quad f(\overline{M}) = \overline{f(M)}$

よって 題意は示された

ここのくわしい同値について.

($\Rightarrow$)

$f^{-1}(\overline{M'}) \subset \overline{f^{-1}(M')}$

$M' = f(M)$とおいて $f^{-1}(\overline{f(M)}) \subset \overline{f^{-1}(f(M))}$

$f^{-1}(\overline{f(M)}) \subset \overline{M}$

$\overline{f(M)} \subset f(\overline{M})$

よって $f(\overline{M}) = \overline{f(M)}$ となり

$\Rightarrow$は示された.

($\Leftarrow$)

$f(\overline{M}) \subset \overline{f(M)}$ は自明なので

$f(\overline{M}) \supset \overline{f(M)}$ より

$M = f^{-1}(M')$とおいて $f(\overline{f^{-1}(M')}) \supset \overline{M'}$

$\overline{f^{-1}(M')} = f^{-1}(\overline{M'})$

よって $\Leftarrow$は示された.