$\boxed{4.5.16}$ 問題の写像を f とおく.

明らかに f は全単射である.

なぜなら, $(x_\lambda)_{\lambda\in\Lambda_1}\times(x_\mu^0)_{\mu\in\Lambda-\Lambda_1}\in\prod_{\lambda\in\Lambda_1}S_\lambda\times\prod_{\mu\in\Lambda-\Lambda_1}\{x_\mu^0\}$ に対し

$(x_\lambda)_{\lambda\in\Lambda_1}\in\prod_{\lambda\in\Lambda_1}S_\lambda$ をとることで,

f の全射性が示せ,

$(x_\lambda)_{\lambda\in\Lambda_1}\neq(y_\lambda)_{\lambda\in\Lambda_1}\in\prod_{\lambda\in\Lambda_1}S_\lambda$ なら

$(x_\lambda)_{\lambda\in\Lambda_1}\times(x_\mu^0)_{\mu\in\Lambda-\Lambda_1}\neq(y_\lambda)_{\lambda\in\Lambda_1}\times(x_\mu^0)_{\mu\in\Lambda-\Lambda_1}$ より

単射性も示せるからである

よって後は f が連続・開写像であることを示せばよい.

まず, 開写像性について, f は全単射なので,

f^{-1} が連続であることを言えばよい.

$$
\begin{tikzcd}
\prod_{\lambda_1\in\Lambda_1} S_{\lambda_1} \arrow[ddr, "pr_{\lambda_1}"'] & \prod_{\lambda_1\in\Lambda_1} S_{\lambda_1}\times\prod_{\mu\in\Lambda-\Lambda_1}\{x_\mu^0\} \arrow[l, "f^{-1}"'] \arrow[d, "i"] \\
 & \prod_{\lambda\in\Lambda} S_\lambda \arrow[d, "pr'_{\lambda_1}"] \\
 & S_{\lambda_1}
\end{tikzcd}
$$

i (包含写像) … 連続
部分空間の定義より

連続 … pr_{λ_1} ※1
直積空間の定義より

pr'_{λ_1} ※1 … 連続
直積空間の定義より

上の可換図式より $pr_{\lambda_1}\circ f^{-1} = pr'_{\lambda_1}\circ i$ は連続.

よって問題 4.5.15 より f^{-1} は連続である.

次に f が連続であることについて.

$$\begin{tikzcd}
\prod_{\lambda_1\in\Lambda_1} S_{\lambda_1} \arrow[r, "f"] \arrow[dr, "pr_\lambda"'] & \prod_{\lambda_1\in\Lambda_1} S_{\lambda_1} \times \prod_{\mu\in\Lambda-\Lambda_1} \{x_\mu^0\} \arrow[d, "pr'_\lambda"] \\
& S_\lambda
\end{tikzcd}$$

連続 …… pr_λ ※2 ※3

pr'_λ ※2 …… 連続

上の可換図式により、$pr_\lambda \circ f = pr'_\lambda$ は連続

よって 問題4.5.15より f は連続

したがって題意は示された。

※この解法には注意すべき点がたくさんある。

※1 …… pr_{λ_1} と pr'_{λ_1} は写像の中身としてはほぼ同じように感じるが、定義域の違いから別の写像であることに注意

※2 …… ※1と同様に pr_λ と pr'_λ は別の写像

※3 pr_λ は $\lambda\in\Lambda_1$ のときは一般の射影として良いが、$\lambda\notin\Lambda_1$ のときは

$$pr_\lambda((x_{\lambda_1})_{\lambda_1\in\Lambda_1}) = x_\lambda^0 \quad (\text{要は } x_\mu^0)$$

と定めることで、この場合においては定値写像となっている。

ただし、このときにおいても定値写像なので連続性は保たれているので問題はない。