5.1.3

2点よりなる離散空間を $A=\{p,q\}$ とおく $(p \neq q)$

まず「Sが連結 $\Longrightarrow$ SからAの上への連続写像が存在しない」を示す。

仮に SからAへの上への連続写像 f が存在するとすると、

$f(S)=A$ となり、連続像は連結なので

Aは連結である。しかし、Aは連結でないので矛盾し、証明ができる。

次に「Sが連結でない $\Longrightarrow$ SからAの上への連続写像が存在する」を示す。

Sは連結でないので、開かつ閉集合であるようなSの部分集合 $M(\neq S, \phi)$

が存在する。このMを利用して、写像 $f: S \longrightarrow A$ を次のように定める

$$f(x)=\begin{cases} p & (x \in M) \\ q & (x \notin M) \end{cases}$$

まずこれは全射である。なぜなら $M \neq S, \phi$ より $S-M \neq \phi$, $M \neq \phi$ であるので

$x \in M$, $y \notin M$ となるような x, y が少なくとも一つ存在するからである

また、これは連続である。$f^{-1}(A)=S$, $f^{-1}(\phi)=\phi$ は明らかで

$f^{-1}(\{p\})=M$, $f^{-1}(\{q\})=S-M$ となり、

これらはすべて開集合となるからである。

したがって

題意は示された。

教科書の解答も

参照すること!