$\boxed{4.4.6}$ まず「fが開写像 $\Leftrightarrow$ (i)」を示す。

$\Rightarrow$ について、$x \in S$ について $V \in V_S(x)$ をとると、

$x \in O$, $O \subset V$ を満たす

Sの開集合 O が存在する。

このとき $f(x_0) \in f(O) \subset f(V)$ で、fは開写像より $f(O)$は

S'における開集合。よって $f(V) \in V_{S'}(f(x))$

$\Leftarrow$ について、S内の開集合 O をとってくる $O = \phi$ のときは明らかなので $O \neq \phi$ とする。

このとき $x' \in f(O)$ について $x' = f(x)$ $(x \in O)$ と書ける。

よって (i)より $O \in V_S(x) \Rightarrow f(O) \in V_{S'}(x')$

つまり、任意の $x' \in f(O)$ について $f(O)$はx'の近傍になっているので

$f(O)$はS'における開集合となり、題意は示された。

次に「fが開写像 $\Leftrightarrow$ (ii)」を示す。

$\Rightarrow$ については明らかなので $\Leftarrow$ を示す。

$O \in \mathfrak{O}$ について
$$O = \bigcup_{\lambda \in \Lambda} W_\lambda \quad (W_\lambda \in \mathfrak{B}) \text{とおける}$$

よって
$$f(O) = f\left(\bigcup_{\lambda \in \Lambda} W_\lambda\right) = \bigcup_{\lambda \in \Lambda} f(W_\lambda)$$

仮定より $f(O) \in \mathfrak{O}'$

よって 題意は示された。

ちなみに 基底 $\mathfrak{B}$ という条件が、準基底 $\mathfrak{B}$ という条件に変わったら

必要十分条件でなくなる。なぜなら $\Leftarrow$ が成り立たないからである。

反例として、$S = \{p, q, r\}$ の位相を考える

準基底 $\mathfrak{B} = \{\{p, q\}, \{q, r\}\}$ とおくと 位相は $\mathfrak{O}(\mathfrak{B}) = \{\phi, \{q\}, \{p, q\}, \{q, r\}, S\}$

そしてもう一つの位相空間 $S' = \{p, q, r\}$ と $\mathfrak{O}' = \{\phi, \{p, q\}, S\}$ によって定める

写像 $f: S \to S'$ について $f(p) = p$, $f(q) = q$, $f(r) = p$ とすると

$O \in \mathfrak{B} \Rightarrow f(O) \in \mathfrak{O}'$ は成り立っているが、

$f(\{q\}) = \{q\} \notin \mathfrak{O}'$ より fは開写像となっていないことがわかる

おそらく fが単射なら必要十分条件になるはず?