5.1.18

$x, y \in S(a^{(1)}, \cdots, a^{(m)})$ とおくと

$x = s_1 a^{(1)} + \cdots + s_m a^{(m)}$

$y = u_1 a^{(1)} + \cdots + u_m a^{(m)}$ とおける。

ただし実数 $s_1, \cdots, s_m, u_1, \cdots, u_m$ は

$s_1 + \cdots + s_m = 1, \quad s_1 \geqq 0, \cdots, s_m \geqq 0$

$u_1 + \cdots + u_m = 1 \quad u_1 \geqq 0, \cdots, u_m \geqq 0$ を満たす。

このとき $\overline{xy}$ の元，すなわち $0 \leqq t \leqq 1$ を満たす実数 t によって

$(1-t)x + ty$ と表される点について考えると

$$
\begin{aligned}
&(1-t)x + ty \\
&= (1-t)\sum_{i=1}^{m} s_i a^{(i)} + t\sum_{i=1}^{m} u_i a^{(i)} \\
&= \sum_{i=1}^{m}\{(1-t)s_i a^{(i)} + t u_i a^{(i)}\} \\
&= \sum_{i=1}^{m}\{(1-t)s_i + t u_i\} a^{(i)}
\end{aligned}
$$

ここで $(1-t)s_i + tu_i$ について $0 \leqq t \leqq 1$, $s_i, u_i \geqq 0$ より

すべての i について $(1-t)s_i + tu_i \geqq 0$

また

$$
\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{m}\{(1-t)s_i + tu_i\} &= (1-t)\sum_{i=1}^{m} s_i + t\sum_{i=1}^{m} u_i \\
&= (1-t) + t \\
&= 1
\end{aligned}
$$

ゆえに $(1-t)x + ty \in S(a^{(1)}, \cdots, a^{(m)})$ であるので

$\overline{xy} \subset S(a^{(1)}, \cdots, a^{(m)})$

したがって 凸集合である。