$\boxed{5.2.2}$ $M = M_1 \cup M_2 \cup \cdots \cup M_n$ Sにおける任意の開被覆

$$M \subset \bigcup_{\lambda \in \Lambda} O_\lambda \quad (O_\lambda \in \mathcal{O}_S) \text{ を考える}$$

このとき、$i \in \mathbb{N},\ 1 \leqq i \leqq n$ の各 i について $M_i \subset \bigcup_{\lambda \in \Lambda} O_\lambda$ となる

M_i はすべての i についてコンパクトより O_λ のうちから適当に m 個の $O_{i1}, O_{i2}, \cdots, O_{im} \in \mathcal{O}_S$ を取り出して

$$M_i \subset O_{i1} \cup O_{i2} \cup \cdots \cup O_{im} \text{ とできる.}$$

ゆえに

$$M_1 \cup M_2 \cup \cdots \cup M_n \subset \bigcup_{(i,j) \in \mathbb{N} \cap [1,n] \times \mathbb{N} \cap [1,m]} O_{ij} \quad \text{とできる}$$

したがって、$M_1 \cup M_2 \cup \cdots \cup M_n$ はコンパクトである。

普通に考えると、

~~[illegible]~~ i によって m の値が変わるが $O_{i1}, \cdots, O_{im}$ に重複を許すことで、最大値に m をそろえることができる。
その場合は m は i によらない定数となる。