$\boxed{5.2.1}$ まず「Mがコンパクト $\Rightarrow$ $(C_M)$」を示す。

Mの $S$ における開被覆 $M \subset \bigcup_{\lambda\in\Lambda} O_\lambda$ $(O \in \mathfrak{O}_S)$ について考えると

$M \subset \bigcup_{\lambda\in\Lambda} O_\lambda$ より

$$M = M \cap \left(\bigcup_{\lambda\in\Lambda} O_\lambda\right) = \bigcup_{\lambda\in\Lambda} (M \cap O_\lambda)$$

よって Mの部分集合系 $\{M \cap O_\lambda \mid \lambda \in \Lambda\}$ はMの開被覆である

Mはコンパクトなので、これらから有限個の $M\cap O_{\lambda_1}, M \cap O_{\lambda_2}, \cdots, M\cap O_{\lambda_n}$ をとり出すと

$$M = (M\cap O_{\lambda_1}) \cup (M \cap O_{\lambda_2}) \cup \cdots \cup (M \cap O_{\lambda_n})$$
$$= M \cap (O_{\lambda_1} \cup O_{\lambda_2} \cup \cdots \cup O_{\lambda_n})$$

よって $M \subset O_{\lambda_1} \cup O_{\lambda_2} \cup \cdots \cup O_{\lambda_n}$ となるので

$\Rightarrow$ は示された。

次に「$(C_M) \Rightarrow$ Mはコンパクト」を示す。

Mの任意の開被覆 $\mathfrak{U}$ を考えると $M = \bigcup \mathfrak{U}$

$\mathfrak{U}$ の定義から $A \in \mathfrak{U}$ はMの開集合なので、

$A = M \cap O_A$ $(O_A \in \mathfrak{O}_S)$ とおける。

よって

$$M = \bigcup_{A\in\mathfrak{U}} (M \cap O_A) = M \cap \left(\bigcup_{A\in\mathfrak{U}_A} O_A\right)$$ より

$$M \subset \bigcup_{A\in\mathfrak{U}_A} O_A$$

条件 $(C_M)$ より 適当な $O_{A_1}, O_{A_2}, \cdots, O_{A_n}$ を取り出すことで

$M \subset O_{A_1} \cup O_{A_2} \cup \cdots \cup O_{A_n}$ とできる

よって

$$M = M \cap (O_{A_1} \cup O_{A_2} \cup \cdots \cup O_{A_n}) = (M\cap O_{A_1}) \cup (M \cap O_{A_2}) \cup \cdots \cup (M \cap O_{A_n})$$

ゆえに M はコンパクトであるので $\Rightarrow$ は示された。

したがって 題意は示された。

割と同値条件ばかり使っているので $\Leftrightarrow$ を使って記述量減らせるかも。