3.2.2 「Aが整列集合」…①，「Aにおいて降鎖は存在しない」…②

(i) ① ⇒ ② について 背理法で示す。

Aにおいて降鎖が存在するとすると

Aの元の列 $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ で $a_1 > a_2 > \cdots > a_n > \cdots$ となるものが存在する。

ここで Aの部分集合 $\bigcup_{n\in\mathbb{N}}\{a_n\} = \bigcup_{n=1}^{\infty}\{a_n\}$ について考える。

わかりやすく $\{a_n \mid n\in\mathbb{N}\} = \{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ と書けばよい。

① より この部分集合にも 最小元をもつので、

$\exists a \in \bigcup_{n=1}^{\infty}\{a_n\}\ \forall x \in \bigcup_{n=1}^{\infty}\{a_n\},\quad a \leqq x$ が成り立つ。

しかし $a \in \bigcup_{n=1}^{\infty}\{a_n\}$ より $\exists N\in\mathbb{N}\quad a = a_N > a_{N+1}$ が成り立つ。

これは 任意の x について $a \leqq x$ と矛盾する。

したがって ① ⇒ ② を示せた。

(ii) ② ⇒ ① について 対偶によって示す。

よって Aは整列集合でないとすると

ある空でない Aの部分集合 X が存在し 最小元を持たない。

$X \neq \phi$ より $x_1 \in X$ をとれるが、X は最小元をもたないので、

$x_1 \neq x_2 \in X$ が存在して $x_1 > x_2$

x_2 についても同様にして $x_2 \neq x_3 \in X$ が存在して $x_2 > x_3$

これを繰り返すと Aの元の列 $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ で $x_1 > x_2 > \cdots > x_n > \cdots$

が成り立つので、対偶について示せた。

ここの~~[illegible]~~手順には おそらく選択公理を使用

~~[illegible]~~

(i) (ii) より 題意は示された

教科書の解答に従った方が良さそう

↳ $M_a = \{x \mid x \in M,\ x < a\}$ を定めて 選択公理を使う方針