6.2.4 (a)
$$d'(x,y) = \frac{d(x,y)}{1+d(x,y)} = 1 - \frac{1}{1+d(x,y)}$$

$d(x,y) \geqq 0$ より $0 \leqq \frac{1}{1+d(x,y)} \leqq 1$ であるので $0 \leqq d'(x,y) \leqq 1$

また、$d'(x,y) = 0$ とすると $1 = \frac{1}{1+d(x,y)} \Leftrightarrow 1+d(x,y) = 1$

$\Leftrightarrow d(x,y) = 0$

$\Leftrightarrow x = y$

そして $d'(x,y) = d'(y,x)$ は明らかに成り立つ

最後に、 $d(x,z) \leqq d(x,y) + d(y,z)$ より

$$d'(x,y) \leqq 1 - \frac{1}{1+d(x,y)+d(y,z)}$$
$$= \frac{d(x,y)+d(y,z)}{1+d(x,y)+d(y,z)}$$
$$= \frac{d(x,y)}{1+d(x,y)+d(y,z)} + \frac{d(y,z)}{1+d(x,y)+d(y,z)}$$

$d(x,y), d(y,z) \geqq 0$ より
$$\leqq \frac{d(x,y)}{1+d(x,y)} + \frac{d(y,z)}{1+d(y,z)}$$
$$= d'(x,y) + d'(y,z)$$

したがって 題意は示された。

(b) (a) において $d'(x,y) \leqq 1$ は示されているので $\delta'(S) \leqq 1$

(c) 任意の正数 ε について、
まず $d(x,a) < \varepsilon$ とすると $d(x,y) \geqq 0$ より
$$d'(x,a) = \frac{d(x,a)}{1+d(x,a)} \leqq \frac{d(x,a)}{1+0} < \varepsilon$$

よって $d(x,a) < \varepsilon \Rightarrow d'(x,a) < \varepsilon$

また $d'(x,a) < \frac{\varepsilon}{1+\varepsilon}$ とすると

$$\frac{d(x,a)}{1+d(x,a)} < \frac{\varepsilon}{1+\varepsilon} \Longleftrightarrow (1+\varepsilon)d(x,a) < \varepsilon\{1+d(x,a)\}$$

$\Leftrightarrow d(x,a) < \varepsilon$ 　よって $d'(x,a) < \varepsilon \Rightarrow d(x,a) < \varepsilon$

したがって 題意は示された。