$\boxed{5.1.9}$ 仮にA∪Bは連結でないと仮定すると、

$$A\cup B = O_1\cup O_2 ,\quad O_1\cap O_2 = \emptyset ,\quad O_1, O_2 \neq \emptyset$$

となるA∪Bにおける開集合 O_1, O_2 が存在する。

このとき、O_1, O_2 は $A\cup B$ における閉集合でもあり $A\cup B \supset A$ より

$A\cap O_1$, $A\cap O_2$ は A における開かつ閉集合である。

Aは連結なので $A\cap O_1 = \emptyset, A$ 　$A\cap O_2 = \emptyset, A$

仮に、$A\cap O_1$, $A\cap O_2$ のどちらも $\emptyset$ だとすると $A\cup B = O_1\cup O_2$ より

$A=\emptyset$ でなければならないが Aを位相空間として考えているので $A\neq\emptyset$ なので

矛盾。これより $A\cap O_1 = A$ または $A\cap O_2 = A$ が成り立つ。

ここで、一般性を失わないので $A\cap O_1 = A$ とすると $A\subset O_1$

このとき $x\in O_2 \Rightarrow x\notin B$ となる x が存在するとすると $A\subset O_1$ より

$x\in O_2 \Rightarrow x\notin B \Rightarrow x\in A \Rightarrow x\in O_1$

これは $O_1\cap O_2 \neq \emptyset$ を意味するので矛盾。故に $x\in O_2$ となるすべてのxに対し

$x\in B$ なので $O_2 \subset B$。 ←ここはP189の定理24(第4章)を用いている

よって O_2 は $A\cup B$ においても、A^cにおいても開かつ閉となる。

そして $(A\cup B)\cap A^c = (A\cap A^c)\cup(B\cap A^c)$

$= \emptyset \cup B$ 　　※$B\subset A^c$ より

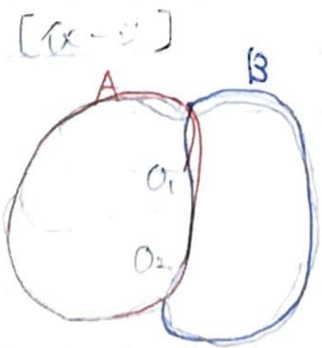
$= B \supset O_2$ 　　なので

問題4.5.7が使え、$A\cup B\cup A^c = S$ においても開かつ閉

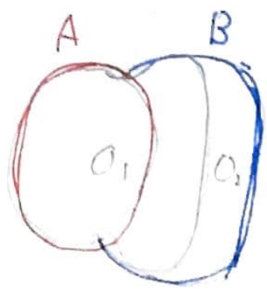
Sは連結より $O_2 = \emptyset, S$ であるが、このどちらも明らかに矛盾する

したがって $A\cup B$は連結である。

[イメージ]



← Aは連結のため、このような開かつ閉の O_1, O_2 で横切られることはない。



$A\subset O_2$ ⇒ $O_2\subset B$ の様子