$\boxed{6.1.8}$ まず $B(a;\varepsilon) \subset B^{(1)}(a_1;\varepsilon) \times \cdots \times B^{(n)}(a_n;\varepsilon)$ を示す。

$x=(x_1,\cdots,x_n) \in B(a;\varepsilon)$ をとってくると、 $d(x,a)<\varepsilon$ より

$$\sqrt{\sum_{i=1}^{n}\{d_i(x_i,y_i)\}^2} < \varepsilon$$

よって、すべての i について

$$\sqrt{\{d_i(x_i,y_i)\}^2} < \varepsilon$$

すなわち $d_i(x_i,y_i) < \varepsilon$ が成り立つ

ゆえに $x \in B^{(1)}(a_1;\varepsilon) \times \cdots \times B^{(n)}(a_n;\varepsilon)$ となり、

$B(a;\varepsilon) \subset B^{(1)}(a;\varepsilon) \times \cdots \times B^{(n)}(a_n;\varepsilon)$ は示せた。

次に $B^{(1)}(a_1;\frac{\varepsilon}{\sqrt{n}}) \times \cdots \times B^{(n)}(a_n;\frac{\varepsilon}{\sqrt{n}}) \subset B(a;\varepsilon)$ を示す。

$x=(x_1,\cdots,x_n) \in B^{(1)}(a_1;\frac{\varepsilon}{\sqrt{n}}) \times \cdots \times B^{(n)}(a_n;\frac{\varepsilon}{\sqrt{n}})$ をとってくると、

各 i について $d_i(x_i,a_i) < \frac{\varepsilon}{\sqrt{n}}$ より $\{d_i(x_i,a_i)\}^2 < \frac{\varepsilon^2}{n}$ で

$$\begin{aligned} d(x,a) &= \sqrt{\sum_{i=1}^{n}\{d_i(x_i,a_i)\}^2} \\ &< \sqrt{\sum_{i=1}^{n}\frac{\varepsilon^2}{n}} \\ &= \varepsilon \end{aligned}$$

よって $x \in B(a;\varepsilon)$ で

$B^{(1)}(a_1;\frac{\varepsilon}{\sqrt{n}}) \times \cdots \times B^{(n)}(a_n;\frac{\varepsilon}{\sqrt{n}}) \subset B(a;\varepsilon)$ となる。