$\boxed{6.1.4}$ $\{B^*(a;\varepsilon)\}^c = \{x \mid x\in S,\ d(a,x)>\varepsilon\}$が開集合であることを示す

$x\in\{B^*(a;\varepsilon)\}^c$ をとってくると $d(a,x)>\varepsilon$ であるので

$d(a,x)-\varepsilon > \varepsilon' > 0$ となる正数 ε' が存在する

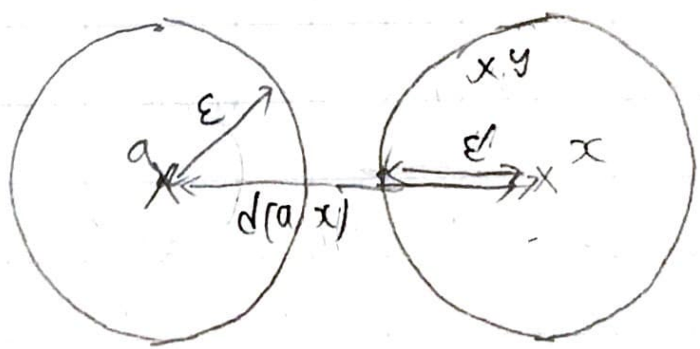
このとき $y\in B(x;\varepsilon')$ について $d(x,y)<\varepsilon'$ より

$$
\begin{aligned}
d(a,y) &\geqq d(a,x) - d(x,y) \\
&> d(a,x) - \varepsilon' \\
&> \varepsilon
\end{aligned}
$$

つまり $B(x;\varepsilon') \subset \{B^*(a;\varepsilon)\}^c$ となるので

$\{B^*(a;\varepsilon)\}^c$は開集合であることが分かり

$B^*(a;\varepsilon)$は閉集合となる.



$S(a;\varepsilon) = B^*(a;\varepsilon)\cap\{B(a;\varepsilon)\}^c$ で

$B^*(a;\varepsilon)$は先ほどの証明より閉集合

$\{B(a;\varepsilon)\}^c$も閉集合なので $S(a;\varepsilon)$は閉集合である