P272へ3の (c) 一意性の証明の補足. もしくは $\boxed{6.4.3}$

まず(1)について 任意の $x^* \in S^*$ に対して $x^* = \lim_{n\to\infty} \varphi(x_n) = \lim_{n\to\infty} \varphi(y_n)$ …① となる

Sの点列 $(x_n), (y_n)$ が存在したとき.

$\lim_{n\to\infty} \hat{\varphi}(x_n) = \lim_{n\to\infty} \hat{\varphi}(y_n)$ となることを示せばよい

教科書の説明から. $\lim_{n\to\infty} \hat{\varphi}(x_n)$, $\lim_{n\to\infty} \hat{\varphi}(y_n)$ は収束するので

これらを $\lim_{n\to\infty} \hat{\varphi}(x_n) = \hat{x}^*$, $\lim_{n\to\infty} \hat{\varphi}(y_n) = \hat{y}^*$ $(\hat{x}^*, \hat{y}^* \in \hat{S}^*)$ とおいてもよい.

まず (S^*, d^*), $(\hat{S}^*, \hat{d}^*)$ に関する (ii) より

$$d(x_n, y_n) = d^*(\varphi(x_n), \varphi(y_n)) = \hat{d}^*(\hat{\varphi}(x_n), \hat{\varphi}(y_n))$$

ここで P 246. 問題 6.1.10より.

$$\lim_{n\to\infty} d^*(\varphi(x_n), \varphi(y_n)) = d^*(\lim_{n\to\infty} \varphi(x_n), \lim_{n\to\infty} \varphi(y_n))$$
$$= d^*(x^*, x^*)$$
$$= 0$$

であるので.

$$\lim_{n\to\infty} \hat{d}^*(\hat{\varphi}(x_n), \hat{\varphi}(y_n)) = 0$$

これと $\hat{y}^*$ の定義より. 任意の正数 ε について. ある自然数 N が存在し.

任意の自然数 n について

$$n \geq N \Rightarrow \begin{array}{l} \hat{d}^*(\hat{\varphi}(x_n), \hat{\varphi}(y_n)) < \frac{\varepsilon}{2} \\ \hat{d}^*(\hat{\varphi}(y_n), \hat{y}^*) < \frac{\varepsilon}{2} \end{array}$$

※ ε-N論法でそれぞれ使用した

よって $n \geq N$ のとき $\hat{d}^*(\hat{\varphi}(x_n), \hat{y}^*)$

$$\leq \hat{d}^*(\hat{\varphi}(x_n), \hat{\varphi}(y_n)) + \hat{d}^*(\hat{\varphi}(y_n), \hat{y}^*)$$
$$< \varepsilon$$

したがって

$$\lim_{n\to\infty} \hat{\varphi}(x_n) = \lim_{n\to\infty} \hat{\varphi}(y_n).$$

これより 題意は示された.

※ $(x_n), (y_n)$ は $x^* = \lim_{n\to\infty} \varphi(x_n)$, $y^* = \lim_{n\to\infty} \varphi(y_n)$ を満たすようにとっている

(4)について

$$\hat{d}^*(f(x^*), f(y^*)) = \hat{d}^*(\lim_{n\to\infty} \hat{\varphi}(x_n), \lim_{n\to\infty} \hat{\varphi}(y_n))$$

問題6.1.10より $= \lim_{n\to\infty} \hat{d}^*(\hat{\varphi}(x_n), \hat{\varphi}(y_n))$

$((S^*, d^*), \varphi)$, $((\hat{S}^*, \hat{d}^*), \hat{\varphi})$の関係 $= \lim_{n\to\infty} d^*(\varphi(x_n), \varphi(y_n))$

問題6.1.10より $= d^*(\lim_{n\to\infty} \varphi(x_n), \lim_{n\to\infty} \varphi(y_n))$

$$= d^*(x^*, y^*)$$

これより 題意は示された.