$\boxed{5.15}$

Aが連結でないと仮定すると

$A = A_1 \cup A_2$, $A_1 \cap A_2 = \phi$, $A_1 \neq \phi$, $A_2 \neq \phi$

となるような $A_1, A_2 \in \mathfrak{U}_A$ が存在する。

よって

$$A \cup B = (A_1 \cup A_2) \cup B$$
$$= A_1 \cup (A_2 \cup B)$$

ここで A_1, A_2 は Aにおいて閉集合 $A \cup B$ においても閉集合である。よって $A_2 \cup B \in A \cup B$ において閉集合である。

そして、

$$A_1 \cap (A_2 \cup B) = (A_1 \cap A_2) \cup (A_1 \cap B)$$
$$= \phi \cup (A_1 \cap B)$$
$$= A_1 \cap B$$

よって $A_1 \cap B = \phi$ とすると、$A \cup B$ が連結であることに矛盾する。

故に $A_1 \cap B \neq \phi$、同様に $A_2 \cap B \neq \phi$

次に、

$$A \cap B = (A_1 \cup A_2) \cap B$$
$$= (A_1 \cap B) \cup (A_2 \cap B)$$

そして、

$$(A_1 \cap B) \cap (A_2 \cap B) = A_1 \cap A_2 \cap B$$
$$= \phi$$

先ほど示したとおり $A_1 \cap B$, $A_2 \cap B \neq \phi$ であり、$A_1 \cap B$, $A_2 \cap B$ は $A \cap B$ においても閉集合であるので、$A \cap B$ が連結であることに矛盾。

したがって Aは連結であり、Bも同様に連結である。

教科書の解答は $A \cap B$ から検討している。