$\boxed{4.1.7}$ まず 「$\mathfrak{B}$ が $\mathfrak{O}$ の基底 $\Longleftrightarrow$ 任意の開集合 $O(\neq\emptyset)$ と、

O の任意の点 a に対し $a\in U$, $U\subset O$

となる $\mathfrak{B}$ の元 U が存在する 」を示す

(i) $\Rightarrow$ について. $\mathfrak{B}$ が $\mathfrak{O}$ の基底なので、任意の開集合 O は

$$O=\bigcup_{\lambda\in\Lambda}B_\lambda \qquad (B_\lambda\in\mathfrak{B})\text{とおける}$$

任意の $a\in O$ について、これより

$$a\in\bigcup_{\lambda\in\Lambda}B_\lambda$$

よって $a\in B_\lambda$ となる λ が存在し、また $B_\lambda\subset O$ である.

したがって $\Rightarrow$ は示された.

(ii) $\Leftarrow$ について. 任意の開集合 $O(\neq\emptyset)$ をとる.

O の各点 a に対して、仮定の $U_a\in\mathfrak{B}$ をとれば明らかに、

$$O=\bigcup_{a\in O}U_a$$

つまり、O は $\mathfrak{B}$ の元の和集合として表されるので、$\Leftarrow$ は示された.

(i), (ii) より $\Longleftrightarrow$ が示された.

次に 「任意の開集合 $O(\neq\emptyset)$ と、O の任意の点 a に対し $a\in U$, $U\subset O$ となる $\mathfrak{B}$ の元 U が存在する $\Longleftrightarrow$ $\mathbb{R}^n$ の任意の点 a と任意の正数 ε とに対し $a\in U$, $U\subset B(a;\varepsilon)$ となる $\mathfrak{B}$ の元 U が存在する 」を示す

(i) $\Rightarrow$ について. $\mathbb{R}^n$ の任意の点 a, 任意の正数 ε について $B(a;\varepsilon)$ は開集合なので

仮定より $a\in U$, $U\subset B(a;\varepsilon)$ となる

$\mathfrak{B}$ の元 U が存在する. よって $\Rightarrow$ は示された.

(ii) $\Leftarrow$ について. 任意の開集合 $O(\neq\emptyset)$ をとってくる.

O は開集合なので、O の任意の点 a に対しある正数 ε が存在し

$B(a;\varepsilon)\subset O$ が成り立つ.

仮定より、これに対し $a\in U$, $U\subset B(a;\varepsilon)$ となる $\mathfrak{B}$ の元 U が存在する

よって $a\in U$, $U\subset B(a;\varepsilon)\subset O$ となるので $\Leftarrow$ は示された

(i), (ii) より $\Longleftrightarrow$ は示された.