3.1.19. $\alpha = \sqrt[3]{2} + \sqrt{2}$ より $\alpha - \sqrt{2} = \sqrt[3]{2}$.

$$\alpha^3 - 3\sqrt{2}\,\alpha^2 + 3\cdot 2\alpha - 2\sqrt{2} = 2$$

$$\alpha^3 + 6\alpha - 2 = \sqrt{2}(3\alpha^2 + 2)$$

$$\alpha^6 + 36\alpha^2 + 4 + 12\alpha^4 - 24\alpha - 4\alpha^3 = 2(9\alpha^4 + 12\alpha^2 + 4)$$

$$\alpha^6 + 12\alpha^4 - 4\alpha^3 + 36\alpha^2 - 24\alpha + 4 = 18\alpha^4 + 24\alpha^2 + 8$$

$$\alpha^6 - 6\alpha^4 - 4\alpha^3 + 12\alpha^2 - 24\alpha - 4 = 0$$

よって $x^6 - 6x^4 - 4x^3 + 12x^2 - 24x - 4$ が最小多項式であることを示す。

$\mathbb{Q}(\sqrt{2})$ の $\mathbb{Q}$ 上の基底として $\{1, \sqrt{2}\}$ がとれる。

また $\mathbb{Q}(\alpha)$ の $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$ 上の基底として $\{1, \sqrt[3]{2}, \sqrt[3]{4}\}$ がとれる。

よって $\mathbb{Q}(\alpha)$ の $\mathbb{Q}$ 上の基底として $\{1, \sqrt{2}, \sqrt[3]{2}, \sqrt[3]{4}, \sqrt{2}\sqrt[3]{2}, \sqrt{2}\sqrt[3]{4}\}$ がとれる。

$\mathbb{Q}(\alpha)$ の次元は 6 なので

$x^6 - 6x^4 - 4x^3 + 12x^2 - 24x - 4$ が最小多項式である。