3.1.13 (1) 明らかに $\sqrt{5} \notin \mathbb{Q}(\sqrt{3})$ より

$[\mathbb{Q}(\sqrt{3}+\sqrt{5}), \mathbb{Q}(\sqrt{3})] \geq 2$.

※ $\alpha = \sqrt{3}+\sqrt{5}$

また $x^2 - 2\sqrt{3} - 2$ は $\mathbb{Q}(\sqrt{3})$ 上のモニックで $\alpha^2 - 2\sqrt{3}\alpha - 2 = 0$

したがって求める最小多項式は $x^2 - 2\sqrt{3}x - 2$

(2) 明らかに $\sqrt[4]{2} \notin \mathbb{Q}(\sqrt{2})$ より

$[\mathbb{Q}(\sqrt[4]{2}), \mathbb{Q}(\sqrt{2})] \geq 2$.

また $x^2 - \sqrt{2}$ は $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$ 上のモニックで $(\sqrt[4]{2})^2 - \sqrt{2} = 0$

したがって求める最小多項式は $x^2 - \sqrt{2}$

(3) $\sqrt[3]{2}, \sqrt[3]{4} \notin \mathbb{Q}(\sqrt{-1})$, で $\sqrt[3]{2}, \sqrt[3]{4}$ は $\mathbb{Q}(\sqrt{-1})$ 上で線形独立なので

$[\mathbb{Q}(\sqrt{-1}\sqrt[3]{2}), \mathbb{Q}(\sqrt{-1})] \geq 3$

また $x^3 + 2\sqrt{-1}$ は $\mathbb{Q}(\sqrt{-1})$ 上のモニックで $(\sqrt{-1}\sqrt[3]{2})^3 + 2\sqrt{-1} = 0$

したがって求める最小多項式は $x^3 + 2\sqrt{-1}$