

4.1.12

演習 4.1.2 の解答を利用す。

1.1. $\mathbb{Q}(\sqrt{2+\sqrt{2}})/\mathbb{Q}$ はガロワ拡大。 $\text{Gal}(\mathbb{Q}(\sqrt{2+\sqrt{2}})/\mathbb{Q}) \cong \mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$ である。

1.2. $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$ について考えよ。 $|\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}| = 4$ である。

非自明な部分群 \iff 位数 2 の部分群

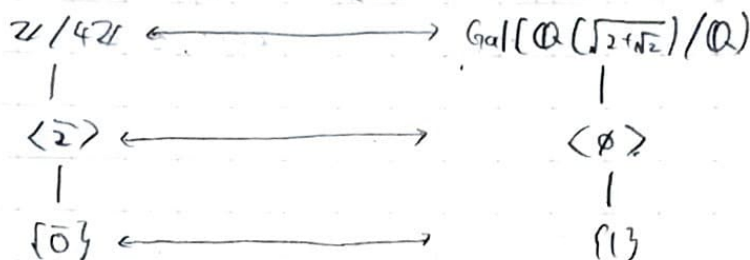
\iff 生成元の位数が 2 の巡回群

$\iff \langle \bar{2} \rangle$ である。

これを

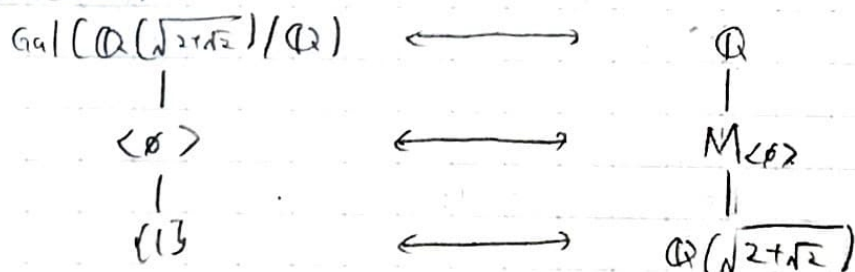
同型で

対応させよ。



1.1. ϕ は $\phi(\sqrt{2+\sqrt{2}}) = -\sqrt{2+\sqrt{2}}$ である。 $\phi \in \text{Gal}(\mathbb{Q}(\sqrt{2+\sqrt{2}})/\mathbb{Q})$

よってガロワの基本定理より



2. 対応した中間体 $M_{\langle \phi \rangle}$ は存在する。

$$\begin{aligned}
 \phi(\sqrt{2+\sqrt{2}}) &= -\sqrt{2+\sqrt{2}} \quad 1) \\
 \phi((\sqrt{2+\sqrt{2}})^2) &= 2+\sqrt{2} \\
 \phi(\sqrt{2}) &= \sqrt{2} \quad 2)
 \end{aligned}$$

$\mathbb{Q}(\sqrt{2}) \subset M_{\langle \phi \rangle}$ である。

$$1.1. [\mathbb{Q}(\sqrt{2}) : \mathbb{Q}] = 2 \quad 1) \quad [\mathbb{Q}(\sqrt{2+\sqrt{2}}) : \mathbb{Q}(\sqrt{2})] = \frac{[\mathbb{Q}(\sqrt{2+\sqrt{2}}) : \mathbb{Q}]}{[\mathbb{Q}(\sqrt{2}) : \mathbb{Q}]} = 2.$$

$$[\mathbb{Q}(\sqrt{2+\sqrt{2}}) : M_{\langle \phi \rangle}] = |\langle \phi \rangle| = 2.$$

(この式は簡単に成り立つ)

よって、 $\mathbb{Q}(\sqrt{2}) \subset M_{\langle \phi \rangle}$ 。

1.1.5.2

$M_{\langle \phi \rangle} = \mathbb{Q}(\sqrt{2})$ である。

求める中間体は

$\mathbb{Q}, \mathbb{Q}(\sqrt{2}), \mathbb{Q}(\sqrt{2+\sqrt{2}})$ である。

$$x^4 - 9x^2 + 2 = 0$$

$$x = \pm \sqrt{2 \pm \sqrt{2}}$$

$$\mathbb{Z}/9\mathbb{Z}$$

$$1.1.5.2$$

$$1.1.5.2$$

$$\mathbb{Q}(\sqrt{2})$$

$$\mathbb{Q}(\sqrt{2})$$