$\boxed{1.11.10}$ (1) $\mathbb{Z}[\sqrt{-1}]$ は $\mathbb{C}$の部分環である。

$x \in \mathbb{Z}[\sqrt{-1}]$ とおくと $a, b \in \mathbb{Z}$を用いて $x = a + b\sqrt{-1}$ とおける。

ここで$\mathbb{C}$においては

$$x^{-1} = \frac{a}{a^2+b^2} - \frac{b}{a^2+b^2}\sqrt{-1} \quad \text{である}$$

xが単元であるので $a \neq 0$ または $b \neq 0$ で $x^{-1} \in \mathbb{Z}[\sqrt{-1}]$

よって

$$\frac{a}{a^2+b^2}, \quad \frac{-b}{a^2+b^2} \text{ は整数.}$$

aは整数より $|a| \leqq |a|^2 \leqq |a|^2 + |b|^2 = a^2+b^2$

$a \neq 0$ または $b \neq 0$より $\left|\frac{a}{a^2+b^2}\right| \leqq 1$ (等号成立 $b=0, a=\pm 1$)

ゆえに $\frac{a}{a^2+b^2} = 0$ または $\frac{a}{a^2+b^2} = \pm 1$

$\frac{a}{a^2+b^2} = 0$ のとき、は $x^{-1} \in \mathbb{Z}[\sqrt{-1}]$であるためには明らかに $a=0, b=\pm 1$

$\frac{a}{a^2+b^2} = \pm 1$ のとき、等号成立条件より $a = \pm 1$, $b = 0$

よって 単元の候補は ± 1, $\pm\sqrt{-1}$ であるが

これらはしっかり単元になるので 題意は示された

(2) $x \in \mathbb{Z}[\sqrt{d}]$とおくと、 $a, b \in \mathbb{Z}$を用いて $x = a + b\sqrt{d}$ とおける

(1)と同様に xが単元であるとき

$$x^{-1} = \frac{a}{a^2-db^2} - \frac{b}{a-db^2}\sqrt{d} \in \mathbb{Z}[\sqrt{d}] \text{ となる}$$

aは整数、$d<0$ より $|a| \leqq |a|^2 \leqq |a|^2 - d|b|^2 = a^2 - db^2$

$a \neq 0$ または $b \neq 0$ より $\left|\frac{a}{a^2-db^2}\right| \leqq 1$ (等号成立 $b=0$, $a=\pm 1$)

(1)と同様にして 単元の候補は ± 1 に絞られる

逆にこれらは単元となるので 題意は示された