$\boxed{1.3.18}$ (1) $I^2 = (x^2, xy, y^2)$ は明らかである。

$I^2 \cap J = (x^2, xy)$ であることを示す。

まず $I^2 \cap J \supset (x^2, xy)$ であることは明らかである。

よって後は $I \cap J \subset (x^2, xy)$ を示せばよい。

$f \in I \cap J$ とおいて、 $f \in I$ より $f_1, f_2, f_3 \in \mathbb{C}[x, y]$ を用いて

$f = x^2 f_1 + xy f_2 + y^2 f_3$ でと書ける。

次に $f \in J$ で $x^2 f_1 + xy f_2 \in J$ より $y^2 f_3 \in J$。

特に $g_1 \in \mathbb{C}[x, y]$ を用いて

$y^2 f_3 = x g_1$ とおける。

ここを厳密に示したいなら f_3 を x で割ったときの商、余りを数えればよい。

これより f_3 は x で割りきれるので、 $f_3' \in \mathbb{C}[x, y]$ を用いて

$f_3 = x f_3'$ とおける。

よって

$$f = x^2 f_1 + xy f_2 + xy^2 f_3' = x^2 f_1 + xy(f_2 + y f_3')$$

なので

$f \in (x^2, xy)$

ゆえに $I^2 \cap J \supset (x^2, xy)$

したがって求める生成元は x^2, xy

(2) $I^3 = (x^3, x^2y, xy^2, y^3)$ であり

(1) と同様にして $I^3 \cap J = (x^3, x^2y, xy^2)$ を示せる。

ここまで分かればさらに (1) と同様にして $I^3 \cap J \cap K = (x^2y, xy^2)$ も示せる。

したがって求める生成元は x^2y, xy^2

1