$\boxed{2.12.1}$ (1)

$$\begin{pmatrix} 6 & 12 \\ 4 & 6 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 2 & 6 \\ 4 & 6 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 2 & 6 \\ 0 & -6 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -6 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 6 \end{pmatrix}$$

よって

$$\mathrm{Coker}(T_A) \cong (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) \oplus (\mathbb{Z}/6\mathbb{Z})$$

このように教科書の方法とは違って、基本変形を繰り返す
(特定の可逆行列をかけていく)ことによって 目的の形を作ってもよい。

(2)

$$\begin{pmatrix} 3 & 7 \\ 10 & 22 \\ 9 & 21 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 3 & 7 \\ 1 & 1 \\ 9 & 21 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 7 \\ 9 & 21 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 4 \\ 9 & 12 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 4 \\ 0 & 12 \end{pmatrix}$$

$$\to \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 4 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

よって $\mathrm{Coker}(T_A) \cong (\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}) \times \mathbb{Z}$

正方行列でないときは $r = m - t > 0$ より 必ず $\mathbb{Z}$ が出る

(3).

$$\begin{pmatrix} 14 & 11 \\ 6 & 5 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 3 & 11 \\ 1 & 3 \\ -2 & 4 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 3 & 11 \\ -2 & 4 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 0 & -4 \\ 0 & 14 \end{pmatrix}$$

$$\to \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 4 \\ 0 & 14 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 4 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

よって $\mathrm{Coker}(T_A) \cong \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$

(4)

$$\begin{pmatrix} 5 & 2 & 5 \\ 6 & 3 & 10 \\ 10 & 4 & 16 \\ 11 & 5 & 15 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 5 & 2 & 5 \\ 1 & 1 & 5 \\ 10 & 4 & 16 \\ 11 & 5 & 15 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & 5 \\ 5 & 2 & 5 \\ 10 & 4 & 16 \\ 11 & 5 & 15 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 5 & -3 & -20 \\ 10 & -6 & -34 \\ 11 & -6 & -40 \end{pmatrix}$$

$$\to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

よって $\mathrm{Coker}(T_A) \cong (\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}) \oplus (\mathbb{Z}/6\mathbb{Z}) \oplus \mathbb{Z}$

答えの方が誤植だと思われる。

中国剰余定理は使えないので