$\boxed{2.6.2}$ (1)

$$|G| = \frac{|SL_2(\mathbb{F}_3)|}{GCD(2,2)} = \frac{|GL_2(\mathbb{F}_3)|}{4} = \frac{(3^2-1)(3^2-3)}{4} = 2\cdot 6 = 12$$

△ この文章を参照

ここで Gの シロー3,2部分群をそれぞれ H, K とおき、それらの数をそれぞれ s, t とおくと

s, tはそれぞれ 4, 3の約数。シローの定理より $s \equiv 1 \pmod 3$ $t \equiv 1 \pmod 2$

よって $s = 1, 4$; $t = 1, 3$ まで絞れる。

$s=1$ かつ $t=1$ だとすると $H, K \triangleleft G$ となり、位数から $HK = G$ であるので、

$G \cong H \times K$ である。$|H| = 2^2$, $|K| = 3$ より、H, K はそれぞれ可換群なので、

Gは可換群となる。

しかし

$$\begin{pmatrix}1&0\\1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&1\\0&1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1&1\\1&2\end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix}2&1\\1&1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1&1\\0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0\\1&1\end{pmatrix}$$ となり

Gは可換ではないので矛盾。

したがって $s = 4$ となり 題意は示された。

解答を間違えたため書いていないが $s=1$ のときとはつまり位数3の元が1個だけのときである。しかしGに $\begin{pmatrix}1&0\\1&1\end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix}1&1\\0&1\end{pmatrix}$ という位数3の元が少なくとも2つあるので矛盾。よって $s \neq 1$ である

(2) (1)より シロー3部分群の集合を $\{H_1, H_2, H_3, H_4\}$ とおき、

問題の置換表現を ρ とおくと

$g \in \mathrm{Ker}\,\rho \iff gH_ig^{-1} = H_i \quad (i = 1,2,3,4)$

$\iff g \in \bigcap_{i=1}^{4} N_G(H_i)$

ここで

$s = \dfrac{|G|}{|N_G(H_i)|} = 4$ より $|N_G(H_i)| = 3$ で

※本当は剰余群の計算だが剰余群においても $\begin{pmatrix}1&0\\1&1\end{pmatrix}H \neq \begin{pmatrix}1&1\\0&1\end{pmatrix}H$ となるため こうしてもよいのである

$|H_i| = 3$, $N_G(H_i) \supset H_i$ であるので $N_G(H_i) = H_i$

ゆえに

$\iff g \in H_i$

$\iff g = 1$

よって ρは単射である ← よく使う論法

~~記載~~ この議論は I、4.7 によるもの

また $\left|\bigcup_{i=1}^{4} H_i \setminus \{1\}\right| = 8$ なので、$\bigcup_{i=1}^{4} H_i \setminus \{1\}$ で生成されるGの部分群 Hは 8以上

かつ、ラグランジュの定理より $|G| = 12$ の約数なので $H = G$

つまり Gは位数3の元で生成されるので $\mathrm{Im}\,\rho$も位数3の元で生成される。

S_4内の位数3の元は長さ3の巡回置換で、これは A_4に含まれるので $\mathrm{Im}\,\rho \subset A_4$

$|\mathrm{Im}\,\rho| = |A_4| = 12$ であるので $G \cong A_4$