$\boxed{2.6.4}$ 定理2.6.16より $S = SL_n(k)$ は $S = [S, S]$ であるので

任意の $g \in S$ に対し、 $g = [g_1, g_1'][g_2, g_2'] \cdots [g_n, g_n']$

$g_1, g_1', \cdots, g_n, g_n' \in G$ とおける。

ここで $\chi([g_i, g_i'])$ について $(i = 1, 2, \cdots, n)$

Gは可換群より

$$\chi([g_i, g_i']) = \chi(g_i)\chi(g_i')\chi(g_i)^{-1}\chi(g_i')^{-1}$$
$$= \chi(g_i')\chi(g_i)^{-1}\chi(g_i)\chi(g_i')^{-1}$$
$$= 1$$

よって

$$\chi(g) = \prod_{i=1}^{n} \chi([g_i, g_i'])$$
$$= 1$$

となる。