

3.3.2

(1)  $f'(x) = 2x + a$

ch k = 2. (1)

$f'(x) = a$

$a=0$  とすると  $f'(x)=0$  となり、これは  $f(x)$  が重根を有することを意味する。

これは  $f(x)$  が分離多項式であることに矛盾するので  $a \neq 0$

また  $b=0$  とすると  $f(x) = x(x+a)$  となり既約性に矛盾。

よって

$b \neq 0$

次に  $a_1 = 0$  とすると

$f(0) = 0$  となり

$b=0$  となるので矛盾。

以上より

$a, a_1 \neq 0$  が示された。

(2). (1)  $a_1 = a_2 \neq 0$  とすると  $\frac{a_2}{a_1} = 1$  となりこれは明らかに  $K$  に属する。

問題が想定した問題ではないので  $a_1 \neq a_2$  という条件を付ける。

$a_1 \neq a_2$  とすると  $a_1, a_2$  は  $f(x)$  の根より

$$x^2 + ax + b = (x - a_1)(x - a_2)$$

(1)  $a_1 \neq 0$  であるとして  $x^2 + ax + b = a_1(x - a_1)\left(\frac{1}{a_1}x - \frac{a_2}{a_1}\right)$

仮に  $\frac{a_2}{a_1} \in K$  とすると  $\frac{1}{a_1}x - \frac{a_2}{a_1}$  は  $K$  上の多項式となり、

これは  $f(x)$  の  $K$  上既約性に矛盾。

以上より

$\frac{a_2}{a_1} \notin K$  である。