$\boxed{2.10.4}$ 写像 $f: M_n(k) \times A \to M_n(A)$ を

$M \in M_n(k), a \in A$ に対して $f(M, a) = Ma$ と定める。

$M_1, M_2 \in M_n(k)$ について

$$f(M_1+M_2, a) = (M_1+M_2)a = M_1a + M_2a = f(M_1, a) + f(M_2, a)$$

$a_1, a_2 \in A$ について $f(M, a_1+a_2) = M(a_1+a_2)$

$$= Ma_1 + Ma_2 = f(M, a_1) + f(M, a_2)$$

$c \in k$ について $f(Mc, a) = (Mc)a$

$$= M(ca) = f(M, ca)$$

$$= cMa = cf(M, a)$$ ※ k は可換環

よって f は k 不変な双線形写像なので

k 代数の準同型 $g: M_n(k) \otimes_k A \to M_n(A)$ で

$g(M \otimes a) = Ma$ となるものがある

$g(M \otimes a) = 0$ とおくと $Ma = 0$ …① である。

$M = (c_{ij})$ $(c_{ij} \in k)$, (i,j) 成分のみが 1 である行列を E_{ij} とおくと

$$M = \sum_{i,j} E_{ij} c_{ij}$$ とおける

よって $$M \otimes a = \sum_{i,j} E_{ij} c_{ij} \otimes a$$

$$= \sum_{i,j} E_{ij} \otimes c_{ij} a$$ (k 不変) なので

①より 各 i,j に対して $ac_{ij} = c_{ij}a = 0$ より (A は k 代数)

$$M \otimes a = 0$$

$\ker g = 0$ より g は単射である

特に $(a_{ij}) \in M_n(A)$ に対し、$\sum_{i,j} E_{ij} \otimes a_{ij}$ を考えると、

$$g\left(\sum_{i,j} E_{ij} \otimes a_{ij}\right) = \sum_{i,j} a_{ij} E_{ij}$$

$$= (a_{ij})$$

よって g は全射である。

したがって

$$M_n(k) \otimes A \cong M_n(A)$$