$\boxed{2.4.3}$ $\begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \end{pmatrix} \in \mathrm{Ker}\,\phi$ とすると.

$$f_1 x + f_2 y + f_3 z = 0$$

$$f_1 x = -f_2 y - f_3 z$$

f_2, f_3 を x で割って それぞれ

$f_2 = g_2 x + h_2(y,z)$ $\quad f_3 = g_3 x + h_3(y,z)$ となったとすると

$$f_1 x = -g_2 xy - g_3 xz - h_2(y,z)\,y - h_3(y,z)\,z$$

x の恒等式より $\begin{cases} f_1 = -g_2 y - g_3 z & \cdots ① \\ 0 = h_2 y + h_3 z & \cdots ② \end{cases}$

② については例 2.4.18 より $(h_2, h_3) = (z, -y)\{h(y,z)\}$ となるので

① とこれらをまとめて $f_1 = -g_2 y - g_3 z$, $f_2 = g_2 x + hz$, $f_3 = g_3 x - h_3 y$ となり

$$\begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \end{pmatrix} = g_2 \begin{pmatrix} -y \\ x \\ 0 \end{pmatrix} + g_3 \begin{pmatrix} -z \\ 0 \\ x \end{pmatrix} + h \begin{pmatrix} 0 \\ z \\ -y \end{pmatrix}$$ となる。

逆に $\begin{pmatrix} -y \\ x \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -z \\ 0 \\ x \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ z \\ -y \end{pmatrix}$ の線形結合で表される A^3 の元は $\mathrm{Ker}\,\phi$ に含まれる.

したがって 求める生成元は

$$\begin{pmatrix} -y \\ x \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -z \\ 0 \\ x \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ z \\ -y \end{pmatrix}$$