$\boxed{2.10.3}$ 写像 $f : A[x_1, x_2, \dots, x_n] \times B \to B[x_1, \dots, x_n]$ を
$h(x_1, x_2, \dots, x_n) \in A[x_1, x_2, \dots, x_n]$, $b \in B$ に対し

$$f(h(x), b) = b\,h(x) \quad \text{と定める.}$$

このとき、 $h_1(x), h_2(x) \in A[x]$ について

$$\begin{aligned} f(h_1(x) + h_2(x), b) &= b(h_1(x) + h_2(x)) \\ &= b h_1(x) + b h_2(x) \\ &= f(h_1(x), b) + f(h_2(x), b) \end{aligned}$$

また、 $b_1, b_2 \in B$ について

$$\begin{aligned} f(h(x), b_1 + b_2) &= (b_1 + b_2) h(x) \\ &= b_1 h(x) + b_2 h(x) \\ &= f(h(x), b_1) + f(h(x), b_2) \end{aligned}$$

$a \in A$ に対し

$$\begin{aligned} f(a h(x), b) &= b(a h(x)) \quad \text{Bは可換環なので} \\ &= ab\,h(x) = a f(h(x), b) \\ &= f(h(x), ab) \quad (A \subset B \text{ より}) \end{aligned}$$

よって fは A不変な双線形写像なので、
A代数の準同型 $g : A[x] \otimes B \to B[x]$,

$$g(h(x) \otimes b) = b\,h(x) \quad \text{となるものがある.}$$

$g(h(x) \otimes b) = 0$ とすると $b\,h(x) = 0$ となる

$$h(x) = \sum_{0 \le i_1, i_2, \dots, i_n \le m} c_{i_1 i_2 \dots i_n} x_1^{i_1} x_2^{i_2} \cdots x_n^{i_n}$$ とおけるので $(c_{i_1 i_2 \dots i_n} \in A)$

$$b\,h(x) = 0 \iff b\,c_{i_1 i_2 \dots i_n} = 0 \quad (0 \le i_1, \dots, i_n \le m)$$

$c_{i_1 i_2 \dots i_n} \in A$ に注意すると

$$\begin{aligned} h(x) \otimes b &= \sum_{0 \le i_1, \dots, i_n \le m} (c_{i_1 \dots i_n} x_1^{i_1} \cdots x_n^{i_n}, b) \\ &= \sum_{0 \le i_1, \dots, i_n \le m} (x_1^{i_1} \cdots x_n^{i_n}, b\,c_{i_1 \dots i_n}) \quad (\text{可換性使用}) \\ &= 0 \end{aligned}$$

よって $\mathrm{Ker}\, g = \{0\}$ より g は単射

また、$h'(x) = \sum_{0 \leq i_1, \cdots, i_n \leq m} b_{i_1 \cdots i_n} x^{i_1} x^{i_2} \cdots x^{i_n} \in B[x]$ について、

$A[x] \otimes_A B$ の元 $\sum_{0 \leq i_1, \cdots, i_n \leq m} (x^{i_1} \cdots x^{i_n} \otimes b_{i_1} \cdots b_{i_n})$ を考えると

明らかに $f\left(\sum_{0 \leq i_1, \cdots, i_n \leq m} (x^{i_1} \cdots x^{i_n} \otimes b_{i_1} \cdots b_{i_n})\right) = h'(x)$

ゆえに f は全射である。

したがって

$$A[x] \otimes_A B \cong B[x]$$