$\boxed{4.1.11}$ $\mathrm{ch}\,\mathbb{Q}=0$, $\sqrt{3}, \sqrt{5}$ の $\mathbb{Q}$ 上の共役はそれぞれ $\pm\sqrt{3}$, $\pm\sqrt{5}$ より
$\mathbb{Q}(\sqrt{3}, \sqrt{5})/\mathbb{Q}$ はガロア拡大である。

演習 4.1.4 より $\mathrm{Gal}(\mathbb{Q}(\sqrt{3}, \sqrt{5})/\mathbb{Q}) \cong \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ である。

$\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ の自明でない部分群は例4.1.21 (P202) と同様に考えて

$\langle(0, \bar{1})\rangle$, $\langle(\bar{1}, \bar{1})\rangle$, $\langle(\bar{1}, \bar{0})\rangle$ の 3つのみ。

$\mathrm{Gal}(\mathbb{Q}(\sqrt{3}, \sqrt{5})/\mathbb{Q})$ の部分群はそれぞれ

$H_1=\langle\tau\rangle$, $H_2=\langle\sigma\tau\rangle$, $H_3=\langle\sigma\rangle$

ただ M_{H_1}, M_{H_2}, M_{H_3} について考えると、明らかに $\mathbb{Q}(\sqrt{5}) \subset M_{H_1}$

また $[\mathbb{Q}(\sqrt{3}, \sqrt{5}) : M_{H_1}] = |H_1| = 2$, $[\mathbb{Q}(\sqrt{3}, \sqrt{5}) : \mathbb{Q}(\sqrt{5})] = 2$

解答はやや雑だが P202 例4.1.21と同じである。

よって $M_{H_1} = \mathbb{Q}(\sqrt{5})$

同様にして $M_{H_2} = \mathbb{Q}(\sqrt{15})$ $M_{H_3} = \mathbb{Q}(\sqrt{3})$ となる。

補題4.1.19と ガロアの基本定理より 分かる