$\boxed{4.7.4}$ t が満たす $\mathbb{Q}$ 上の3次方程式がある $\Longleftrightarrow$ $\{t^3, t^2, t, 1\}$ は線形従属

よって $a, b, c, d \in \mathbb{Q}$ $abcd \neq 0$ を用いて

$$at^3 + bt^2 + ct + d = 0$$ が成り立つ.

$t = \zeta_7 + \zeta_7^6$ より $a(\zeta_7^3 + 3\zeta_7^8 + 3\zeta_7^{13} + \zeta_7^{18}) + b(\zeta_7^2 + 2\zeta_7^7 + \zeta_7^{12})$

$+ c(\zeta_7 + \zeta_7^6) + d = 0$

$a(\zeta_7^3 + 3\zeta_7 + 3\zeta_7^6 + \zeta_7^4) + b(\zeta_7^2 + 2 + \zeta_7^5)$

$+ c(\zeta_7 + \zeta_7^6) + d = 0$

$(2b+d) + \zeta_7(3a+c) + \zeta_7^2(b) + \zeta_7^3(a) + \zeta_7^4(a) + \zeta_7^5(b) + \zeta_7^6(c+3a) = 0$

$\zeta_7^6 + \zeta_7^5 + \zeta_7^4 + \cdots + \zeta_7 + 1 = 0$ より

$\zeta_7^6 = -(\zeta_7^5 + \cdots + 1)$ であるので

$(2b+d-3a-c) + \zeta_7^2(b-3a-c) + \zeta_7^3(-2a-c) + \zeta_7^4(-2a-c) + \zeta_7^5(b-3a-c) = 0$

$\{1, \zeta_7, \cdots, \zeta_7^5\}$ は $\mathbb{Q}(\zeta_7)$ の $\mathbb{Q}$ 上の基底より

$$\begin{cases} -3a + 2b - c + d = 0 \\ -3a + b - c = 0 \\ -2a - c = 0 \end{cases}$$

これを解くと

$a = \alpha,\ b = \alpha,\ c = -2\alpha,\ d = -\alpha$ $(\alpha \in \mathbb{Q})$

よって求める方程式の一つとして $x^3 + x^2 - 2x - 1$ がとれる.

もし、仮に t の満たす方程式が仮に何次か分からなくても.
$\{t^6, t^5, \cdots t, 1\}$ は
$[\mathbb{Q}(\zeta_7):\mathbb{Q}] = 6$ より
線形従属なので
6次~~方程~~以下の方程式を探せる。

今回は問題において3次が存在することが予想できるが
分からないときはこうしよう。