$\boxed{3.1.12}$ (1) $\alpha = \sqrt{3} + \sqrt{5}$ より

$$\alpha - \sqrt{3} = \sqrt{5}$$
$$\alpha^2 - 2\sqrt{3}\alpha + 3 = 5$$
$$\alpha^2 - 2 = 2\sqrt{3}\alpha$$
$$\alpha^4 - 4\alpha^2 + 4 = 12\alpha^2$$
$$\alpha^4 - 16\alpha^2 + 4 = 0$$

ここで $f(x) = x^4 - 16x^2 + 4$ が $\mathbb{Q}$ 上可約であるとすると

$f(\pm 1) = 1 - 16 + 4 = -11 \neq 0$　$f(\pm 2) = 16 - 64 + 4 = -44 \neq 0$

$f(\pm 4) = 4^4 - 4^4 + 4 \neq 0$ より

$f(x) = (2\text{次}) \times (2\text{次})$ の形となる。

$f(x)$ はモニックなので $f(x) = (x^2 + ax + b)(x^2 + cx + d)$ となる $a, b, c, d \in \mathbb{Z}$ が存在する。

このとき $x^4 - 16x^2 + 4 = x^4 + (a+c)x^3 + (b + ac + d)x^2 + (bc + ad)x + bd$

$$\begin{cases} a + c = 0 & \cdots ① \\ b + ac + d = -16 & \cdots ② \\ bc + ad = 0 & \cdots ③ \\ bd = 4 & \cdots ④ \end{cases}$$

①より $a = -c$ であるから ③に代入して $bc - cd = 0$

$c(b - d) = 0$

[1] $c \neq 0$ のとき $b = d$ となり ④より $b = d = \pm 2$

②に代入して $-c^2 = -16 \mp 4$

$c^2 = 16 \pm 4$

これは $c \in \mathbb{Z}$ を満たさない

例題3.1.14と同じようにして $[\mathbb{Q}(\sqrt{3} + \sqrt{5}) : \mathbb{Q}] = 4$ を示して最小多項式であることを示してもよい

[2] $c = 0$ のとき ②, ④ はそれぞれ $b + d = -16$, $bd = 4$ となり、これは $x^2 + 16x + 4 = 0$ の解 $x = -8 \pm \sqrt{60}$ に対応するので矛盾。

したがって $f(x)$ は既約であるので、

求める最小多項式は $x^4 - 16x^2 + 4$

また $x^4 - 16x^2 + 4 = 0 \iff x^2 = 8 \pm 2\sqrt{15} = (\sqrt{3} \pm \sqrt{5})^2$

$\iff x = \pm\sqrt{3} \pm \sqrt{5}$

よって求める共役は $\pm\sqrt{3} \pm \sqrt{5}$

(2) $f(x) = x^3 - 4$ とおくと $f(\sqrt[3]{4}) = 0$ で

$f(\pm 1) \neq 0$　$f(\pm 2) \neq 0$　$f(\pm 4) \neq 0$ より $\mathbb{Q}$ 上既約

よって $x^3 - 4$ が最小多項式

また共役は $x^3 - 4 = 0 \iff \left(\frac{x}{\sqrt[3]{4}}\right)^3 - 1 = 0$ より

$\sqrt[3]{4}$, $\omega\sqrt[3]{4}$, $\omega^2\sqrt[3]{4}$ (ω は1の複素3乗根)

$\sqrt[3]{2} \in \mathbb{Q}(\sqrt[3]{4})$ を言って $\mathbb{Q}(\sqrt[3]{2}) \subset \mathbb{Q}(\sqrt[3]{4})$ を示し

$\mathbb{Q}(\sqrt[3]{2}) = \mathbb{Q}(\sqrt[3]{4})$ で $[\mathbb{Q}(\sqrt[3]{4}) : \mathbb{Q}] = 3$ を示すのもよい

(3) $\alpha = \sqrt{-1}\sqrt[3]{2}$ とおくと、両辺を3乗して $\alpha^3 = -\sqrt{-1}\,2$.

さらに両辺を2乗して $\alpha^6 = -4$

$\alpha^6 + 4 = 0$

ここで $\alpha^4 = 2\sqrt[3]{2}$ より $\sqrt[3]{2} = \frac{\alpha^4}{2}$

また $\alpha^3 = -\sqrt{-1}\,2$ より $\sqrt{-1} = -\frac{\alpha^3}{2}$

よって $\sqrt[3]{2}, \sqrt{-1} \in \mathbb{Q}(\alpha)$

中間体から拡大体の次数を探る

$[\mathbb{Q}(\sqrt[3]{2}) : \mathbb{Q}] = 3$, $[\mathbb{Q}(\sqrt{-1}) : \mathbb{Q}] = 2$ より $[\mathbb{Q}(\alpha) : \mathbb{Q}]$ は6の倍数。

そして $\alpha^6 + 4 = 0$ より 求める最小多項式は $x^6 + 4$ と分かる

また $x^6 + 4 = 0 \iff x^6 = -4$ これは複素平面上の方程式を解いて

$\iff x = \pm\sqrt{-1}\sqrt[3]{2}, \pm\sqrt{-1}\,\omega\sqrt[3]{2}, \pm\sqrt{-1}\,\omega^2\sqrt[3]{2}$

よって求める共役は $\pm\sqrt{-1}\sqrt[3]{2}, \pm\sqrt{-1}\,\omega\sqrt[3]{2}, \pm\sqrt{-1}\,\omega^2\sqrt[3]{2}$.

(4) $\alpha = \sqrt{1+\sqrt{2}}$ とおくと $\alpha^2 = 1+\sqrt{2}$

$\alpha^2 - 1 = \sqrt{2}$

$\alpha^4 - 2\alpha^2 + 1 = 2$.

$\alpha^4 - 2\alpha^2 - 1 = 0$

ここで 演習 1.12.2 より $x^4 + x + 2$ は $\mathbb{F}_3$ 上既約なので

$x^4 - 2x^2 - 1$ は $\mathbb{Q}[x]$ の既約元

よって求める多項式は $x^4 - 2x^2 - 1$ で、共役は $\alpha^4 - 2\alpha^2 - 1 = 0$ を求めた手順を逆に辿って $\pm\sqrt{1\pm\sqrt{2}}$ と分かる。

$\sqrt{1-\sqrt{2}}$ は $1-\sqrt{2} < 0$ より 実数ではなく、

これは $x^2 = 1-\sqrt{2}$ を表す2つの複素数の一方を表す。

(1)〜(4) を見て分かるように共役を求める手順の一つとして、その最小多項式を求めた過程を逆に辿っていくという方法がある。