$\boxed{4.1.12}$ 演習4.1.2の解答を利用する。

すると $\mathbb{Q}(\sqrt{2+\sqrt{2}})/\mathbb{Q}$ はガロア拡大で $\mathrm{Gal}(\mathbb{Q}(\sqrt{2+\sqrt{2}})/\mathbb{Q}) \cong \mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$ である。

よって $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$ について考える。 $|\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}| = 4$ より

非自明な部分群 $\Longleftrightarrow$ 位数2の部分群

$\Longleftrightarrow$ 生成元の位数が2の巡回群

$\Longleftrightarrow$ $\langle \bar{2} \rangle$ である

これらを同型で対応させると、

$$
\begin{array}{ccc}
\mathbb{Z}/4\mathbb{Z} & \longleftrightarrow & \mathrm{Gal}(\mathbb{Q}(\sqrt{2+\sqrt{2}})/\mathbb{Q}) \\
| & & | \\
\langle \bar{2} \rangle & \longleftrightarrow & \langle \phi \rangle \\
| & & | \\
\{\bar{0}\} & \longleftrightarrow & \{1\}
\end{array}
$$

ただし ϕ は $\phi(\sqrt{2+\sqrt{2}}) = -\sqrt{2+\sqrt{2}}$ となるような $\phi \in \mathrm{Gal}(\mathbb{Q}(\sqrt{2+\sqrt{2}})/\mathbb{Q})$

さらにガロアの基本定理より

$$
\begin{array}{ccc}
\mathrm{Gal}(\mathbb{Q}(\sqrt{2+\sqrt{2}})/\mathbb{Q}) & \longleftrightarrow & \mathbb{Q} \\
| & & | \\
\langle \phi \rangle & \longleftrightarrow & M_{\langle \phi \rangle} \\
| & & | \\
\{1\} & \longleftrightarrow & \mathbb{Q}(\sqrt{2+\sqrt{2}})
\end{array}
$$

と対応するような中間体 $M_{\langle \phi \rangle}$ が存在する

$\phi(\sqrt{2+\sqrt{2}}) = -\sqrt{2+\sqrt{2}}$ より $\phi((\sqrt{2+\sqrt{2}})^2) = 2+\sqrt{2}$

$\phi(\sqrt{2}) = \sqrt{2}$ より

$\mathbb{Q}(\sqrt{2}) \subset M_{\langle \phi \rangle}$ である。

また、 $[\mathbb{Q}(\sqrt{2}) : \mathbb{Q}] = 2$ より $[\mathbb{Q}(\sqrt{2+\sqrt{2}}) : \mathbb{Q}(\sqrt{2})] = \dfrac{[\mathbb{Q}(\sqrt{2+\sqrt{2}}) : \mathbb{Q}]}{[\mathbb{Q}(\sqrt{2}) : \mathbb{Q}]} = 2$

$[\mathbb{Q}(\sqrt{2+\sqrt{2}}) : M_{\langle \phi \rangle}] = |\langle \phi \rangle| = 2$

こいつはこの等式より簡単に求まるので　こちらと合わせておく。

したがって $M_{\langle \phi \rangle} = \mathbb{Q}(\sqrt{2})$ であるので、

求める中間体は $\mathbb{Q}$, $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$, $\mathbb{Q}(\sqrt{2+\sqrt{2}})$ である。