$\boxed{4.12.3}$ $\mathbb{Q}^\times/(\mathbb{Q}^\times)^3$ 内で 4, 3, 25, 7 が生成する部分群 H' について

例4.9.8と同様にして 素因数分解の一意性から $H' \cong (\mathbb{Z}/3\mathbb{Z})^4$

次に写像 $f: \mathbb{Q}(\omega)^\times/(\mathbb{Q}(\omega)^\times)^3 \longrightarrow \mathbb{Q}^\times/(\mathbb{Q}^\times)^3$

$a \in \mathbb{Q}(\omega)^\times$ に対して、 $f(a(\mathbb{Q}(\omega)^\times)^3) = N_{\mathbb{Q}(\omega)/\mathbb{Q}}(a)(\mathbb{Q}^\times)^3$ について考える。

$a \in \mathbb{Q}(\omega)^\times$ から、 $N_{\mathbb{Q}(\omega)/\mathbb{Q}}(a) \in \mathbb{Q}^\times$ より 確かに $f: \mathbb{Q}(\omega)/(\mathbb{Q}(\omega)^\times)^3 \to \mathbb{Q}^\times/(\mathbb{Q}^\times)^3$ となっている。

そして、 $a(\mathbb{Q}(\omega)^\times)^3 = b(\mathbb{Q}(\omega)^\times)^3$ なら $b = aq^3$ $(q \in \mathbb{Q}(\omega))$ が成り立つ。

$f(b(\mathbb{Q}(\omega)^\times)^3) = N_{\mathbb{Q}(\omega)/\mathbb{Q}}(aq^3)(\mathbb{Q}^\times)^3 = N_{\mathbb{Q}(\omega)/\mathbb{Q}}(a)(\mathbb{Q}^\times)^3$ である

つまり、写像 f は well-defind である。 $N_{\mathbb{Q}(\omega)/\mathbb{Q}}$ の準同型性より

写像 f も準同型写像である

ここで H について考えたいので、 H への制限写像 $f|_H$ を考えると、明らかに $\mathrm{Im}\, f|_H = H'$ である。

そして $x = 4^a \cdot 3^b \cdot 25^c \cdot 7^d (\mathbb{Q}(\omega)^\times)^3 \in \mathbb{Q}(\omega)^\times/(\mathbb{Q}(\omega)^\times)^3$ について、

$$f(x) = (\mathbb{Q}^\times)^3$$

$\iff N_{\mathbb{Q}(\omega)/\mathbb{Q}}(4^a \cdot 3^b \cdot 25^c \cdot 7^d) \in (\mathbb{Q}^\times)^3$ 　ルールを使って $\mathbb{Q}(\omega) \to \mathbb{Q}$ を移動させた

$\phi(3) = 2$ より $\iff 4^{2a} \cdot 3^{2b} \cdot 25^{2c} \cdot 7^{2d} \in (\mathbb{Q}^\times)^3$ 　素因数分解の

2と3は互いに素より $\iff 4^a \cdot 3^b \cdot 25^c \cdot 7^d \in (\mathbb{Q}^\times)^3$ 　一意性を使えるようにしている

$\iff x \in (\mathbb{Q}^\times)^3$

$\iff x \in (K^\times)^3$

$\iff \ker f|_H = \{(K^\times)^3\}$

大事なのは、お次 $x \in (\mathbb{Q}^\times)^3 \iff x \in (K^\times)^3$ の同値関係が成り立つことである。

[ここについて、 $(\mathbb{Q}^\times)^3 \subset (K^\times)^3$ より $\Rightarrow$ はOK.

逆に $x = 4^a \cdot 3^b \cdot 25^c \cdot 7^d$ で $x \in (K^\times)^3$ なら $4^a \cdot 3^b \cdot 25^c \cdot 7^d = x^3$ $(x \in (K^\times)^3)$

とおけて ルールを使うと $4^{2a} \cdot 3^{2b} \cdot 25^{2c} \cdot 7^{2d} = N_{\mathbb{Q}(\omega)/\mathbb{Q}}(x)^3 \in (\mathbb{Q}^\times)^3$

2と3は互いに素より $x \in (\mathbb{Q}^\times)^3$ となるので $\Leftarrow$ もOK.]

$\ker f|_H = \{(K^\times)^3\}$ より $f|_H$ は単射なので、 $H \cong H'$

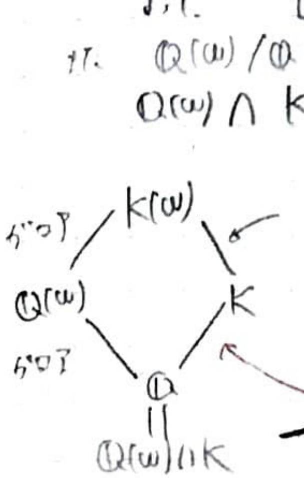
よって $H \cong (\mathbb{Z}/3\mathbb{Z})^4$

(2) クンマー理論より $\mathrm{Gal}(K(\omega)/\mathbb{Q}(\omega)) \cong (\mathbb{Z}/3\mathbb{Z})^4$

よって、 $[K(\omega) : \mathbb{Q}(\omega)] = 81$

また、 $\mathbb{Q}(\omega)/\mathbb{Q}$ はガロア拡大で $[\mathbb{Q}(\omega) : \mathbb{Q}] = 2$ となり

$\mathbb{Q}(\omega) \cap K \subsetneq \mathbb{Q}$ より $\mathbb{Q}(\omega) \cap K = \mathbb{Q}$



推進定理より $K(\omega)/K$ もガロア拡大で $[K(\omega) : K] = 2$

よって $[K(\omega) : \mathbb{Q}] = [K(\omega) : K][K : \mathbb{Q}]$

$2 \cdot 81 = 2 \cdot [K : \mathbb{Q}]$

$[K : \mathbb{Q}] = 81$ となる。

※ここには ガロアの推進定理を 用いることができないので注意