$\boxed{2.7.1}$ α が $\mathbb{Z}$ 上整 $\iff$ $\mathbb{Z}[\alpha]$ を含む部分環 $C \subset \mathbb{R}$ で、$\mathbb{Z}$加群として有限生成なものがある

$\iff$ $\mathbb{Z}[\alpha]$ は有限生成加群 となり、

$\mathbb{Z}[\alpha]$が実際に有限生成なら、命題 2.7.2の(3)の手法を使用できる。

よってまず、$\mathbb{Z}[\alpha]$ の 1を含む有限生成系を探せばよい

つまり Sの元で α^i $(i \in \mathbb{Z})$ を表せさえすればよい。

ここで $\alpha = \sqrt{2} + \sqrt{3}$

$\alpha^2 = 5 + 2\sqrt{6}$ なので

$S = \{1, \sqrt{2}, \sqrt{3}, \sqrt{6}\}$ として探せば

$$\alpha^{2i} = (\alpha^2)^i = (5 + 2\sqrt{6})^i$$

二項定理より これは 1と$\sqrt{6}$で表されることは明らか。よってこれを $a + b\sqrt{6}$ $(a, b \in \mathbb{Z})$ とおくと、

$$\alpha^{2i+1} = (5 + 2\sqrt{6})^i(\sqrt{2} + \sqrt{3}) = (a + b\sqrt{6})(\sqrt{2} + \sqrt{3}) = a\sqrt{2} + 2b\sqrt{3} + 3b\sqrt{2} + a\sqrt{3}$$ となり、

これも Sの元で表せることは明らか!

よって 一つの有限生成系の例として $S = \{1, \sqrt{2}, \sqrt{3}, \sqrt{6}\}$ が考えられる

後はこれに 命題 2.7.2の(3)の手法を用いる。

$$\alpha \cdot 1 = 0 \cdot 1 + 1 \cdot \sqrt{2} + 1 \cdot \sqrt{3} + 0 \cdot \sqrt{6}$$
$$\alpha \cdot \sqrt{2} = 2 \cdot 1 + 0 \cdot \sqrt{2} + 0 \cdot \sqrt{3} + 1 \cdot \sqrt{6}$$
$$\alpha \cdot \sqrt{3} = 3 \cdot 1 + 0 \cdot \sqrt{2} + 0 \cdot \sqrt{3} + 1\sqrt{6}$$
$$\alpha \cdot \sqrt{6} = 0 + 3\sqrt{2} + 2\sqrt{3} + 0\sqrt{6}$$

よって

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$ とすれば

$$\det(P - tE) = \begin{vmatrix} -t & 1 & 1 & 0 \\ 2 & -t & 0 & 1 \\ 3 & 0 & -t & 1 \\ 0 & 3 & 2 & -t \end{vmatrix}$$

※ 行・列の入れかえにともなう −1倍の違いは どうせ $f(\alpha) = 0$ になるので無視する

$$= \begin{vmatrix} 1 & -t & 1 & 0 \\ -t & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & -t & 1 \\ 3 & 0 & 2 & -t \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -t & 2-t^2 & t & 1 \\ 0 & 3 & -t & 1 \\ 3 & 3t & -1 & -t \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2-t^2 & t & 1 \\ 3 & -t & 1 \\ 3t & -1 & -t \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 2-t^2 & t & 1 \\ 3 & -t & 1 \\ 3t & -1 & -t \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2+2t^2 & 0 & 1-t^2 \\ 3-3t^2 & 0 & 1+t^2 \\ 3t & -1 & -t \end{vmatrix}$$

$(2t^2+2)(t^2+1)$
$(3t^2-3)(t^2-1)$

$$= \begin{vmatrix} 2+2t^2 & 1-t^2 \\ 3-3t^2 & 1+t^2 \end{vmatrix} = (2+2t^2)(1+t^2) - (1-t^2)(3-3t^2)$$

$$= 2t^4 + 4t^2 + 2 - 3t^4 + 6t^2 - 3$$

$$= -t^4 + 10t^2 - 1$$

よって求める多項式は $f(x) = t^4 - 10t^2 + 1$.

確かに $\alpha = \sqrt{2} + \sqrt{3}$ について

$$\alpha^2 = 5 + 2\sqrt{6}$$
$$(\alpha^2 - 5)^2 = (2\sqrt{6})^2$$
$$\alpha^4 - 10\alpha^2 + 25 = 24$$
$$\alpha^4 - 10\alpha^2 + 1 = 0$$

となるので

条件を満たしていることが分かる