$\boxed{1.6.4}$ P28 例1.4.10より $\mathbb{Z}[\sqrt{-5}] \cong \mathbb{Z}[x]/(x^2+5)$

この同型により (3) は 3 の類に対応するので

$$\frac{\mathbb{Z}[\sqrt{-5}]}{(3)} \cong \frac{\mathbb{Z}[x]/(x^2+5)}{(3)/(x^2+5)} = \frac{\mathbb{Z}[x]/(x^2+5)}{(3, x^2+5)/(x^2+5)}$$

さらに第三同型定理より

$$\frac{\mathbb{Z}[x]/(x^2+5)}{(3, x^2+5)/(x^2+5)} \cong \frac{\mathbb{Z}[x]}{(3, x^2+5)}$$

ここで $f(x) \in (3, x^2+5)$ とすると、$g(x), h(x) \in \mathbb{Z}[x]$ が存在し

$f(x) = 3g(x) + (x^2+5)h(x)$ となる。

よって $f(x) = 3g(x) + \{(x^2-1)+6\}h(x)$

$= 3\{g(x)+2h(x)\} + (x^2-1)h(x)$ となり

$f(x) \in (3, x^2-1)$ である。逆もまた然りなので

$(3, x^2+5) = (3, (x-1)(x+1))$

ゆえに $\dfrac{\mathbb{Z}[x]}{(3, x^2+5)} = \dfrac{\mathbb{Z}[x]}{(3, (x-1)(x+1))} \cong \dfrac{\mathbb{Z}[x]/(3)}{(3, (x-1)(x+1))/(3)} = \dfrac{\mathbb{Z}[x]/(3)}{(x-1)(x+1)/(3)}$

命題1.4.11より $\mathbb{Z}[x]/(3) \cong \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}[x]$ となり、

この同型により $(x-1)(x+1)$ は $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}[x]$ におけるイデアル$(x-1)(x+1)$に対応するので

$$\frac{\mathbb{Z}[x]/(3)}{(x-1)(x+1)/(3)} \cong \frac{\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}[x]}{(x-1)(x+1)}$$

ここで $\bar{2}(x+\bar{1}) - \bar{2}(x-\bar{1}) = \bar{2}x+\bar{2}-\bar{2}x+\bar{2}$

$= \bar{4}$

$= \bar{1}$ なので、

$(x-1)+(x+1) = \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}[x]$ が成り立つ。

よって中国式剰余定理から

$$\frac{\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}[x]}{(x-1)(x+1)} \cong \frac{\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}[x]}{(x-1)} \times \frac{\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}[x]}{(x+1)}$$

$\phi : \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}[x] \to \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$ を $\phi(x) = \bar{1}$ とする準同型と定めると

準同型定理より $\dfrac{\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}[x]}{(x-1)} \cong \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$。$\dfrac{\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}[x]}{(x+1)}$ についても同様なので

$$\frac{\mathbb{Z}[\sqrt{-5}]}{(3)} \cong (\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}) \times (\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}) = \mathbb{F}_3 \times \mathbb{F}_3$$ となる。