$\boxed{2.6.1}$ (1)

$$|G| = \frac{|SL_2(\mathbb{F}_2)|}{GCD(2,1)}$$
$$= |SL_2(\mathbb{F}_2)|$$
$$= \frac{|GL_2(\mathbb{F}_2)|}{2-1}$$
$$= |GL_2(\mathbb{F}_2)|$$
$$= (2^2-1)(2^2-2)$$
$$= 6$$

よって Gは位数6の群である。Gのシロー2部分群,3部分群をH, K,
またそれぞれの部分群の数をs, tとおくとすると.
s, tはそれぞれ、3, 2の約数で. シローの定理より $s \equiv 1 \pmod 2$ $t \equiv 1 \pmod 3$
よって、$s = 1, 3$, $t = 1$ までしぼられる
$t=1$より $K \triangleleft G$であるが、ここで、$s=1$であると $H \triangleleft G$となり.
位数より $HK = G$ を示せるので. $G = H \times K \cong \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$
※位数から $H \cap K = \{1\}$も示しておこう.
$\cong \mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$ となる.

つまり、Gは巡回群であるが $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in G$ について

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$ より

Gは可換群でないので矛盾する
ゆえに $s=3$ である. 位数2の部分群は位数2の元の巡回群と同等
なので. 位数2の元の数はsつまり 3個有る.

(2) 3個の位数2の元をr_1, r_2, r_3とおく。また、問題の置換表現をρとおくと

$g \in \mathrm{Ker}\,\rho \iff g r_i g^{-1} = r_i \quad (i = 1, 2, 3)$

$\iff g \in \bigcap_{i=1}^{3} N_G(\langle r_i \rangle)$

この論法は広く使えるので覚えておこう

ここで $s=3$, $s = |G|/|N_G(\langle r_i \rangle)|$ より $|N_G(\langle r_i \rangle)| = 2$で
$N_G(\langle r_i \rangle) \supset \langle r_i \rangle$ より $N_G(\langle r_i \rangle) = \langle r_i \rangle$ であるので

$\iff g \in \bigcap_{i=1}^{3} \langle r_i \rangle$

$\iff g = 1$

よって ρは単射. そして $|G| = |\mathfrak{S}_3| = 6$ であるので
$G \overset{\rho}{\cong} \mathfrak{S}_3$ である.

[別の方法]
$r^2 = c^3 = 1$ $rcr^{-1} = c^{-1}$
を示して
後は $G \cong \langle r, c \rangle \cong D_3 \cong \mathfrak{S}_3$ と
示してもよい
この場合 置換表現により
同型はなっていない