$\boxed{4.1.7}$ 4.1.6の解答と同じ流れで進める。

T は $\mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$ の生成元より $K^{\sigma} = \{k \in K \mid \sigma(k) = k\}$ と書け

$f(x, y, z) \in \mathbb{C}[x, y, z]$ が $f(x, y, z) \in K^{\sigma}$ となる条件について考える。

σ は準同型なので $f(x, y, z)$ の項を次数にわけ分けたときの、その一項について考えればいい

とりあえず、その一項を $c x^i y^j z^k$ $\left(\begin{array}{l} c \in \mathbb{C} \\ c \neq 0 \end{array}\right)$

$$\sigma(c x^i y^j z^k) = c x^i y^j z^k \iff c \zeta_5^{i+2j+3k} x^i y^j z^k = c x^i y^j z^k$$
$$\iff \zeta_5^{i+2j+3k} = 1$$
$$\iff i+2j+3k \equiv 0 \pmod 5$$

$i+2j+3k \equiv 0 \pmod 5$ より $i = 5m - 2j - 3k$ $(m \in \mathbb{Z})$ とおけるので、

$$c x^i y^j z^k = c x^{5m-2j-3k} y^j z^k$$
$$= c (x^5)^m \left(\frac{y}{x^2}\right)^j \left(\frac{z}{x^3}\right)^k \in \mathbb{C}\left(x^5, \frac{y}{x^2}, \frac{z}{x^3}\right)$$

この議論により $f(x, y, z) \in K^{\sigma} \iff f(x, y, z) \in \mathbb{C}\left(x^5, \frac{y}{x^2}, \frac{z}{x^3}\right)$

$\mathbb{C}(x, y)$ の元は $\dfrac{(\text{多項式})}{(\text{多項式})}$ と表されるので、同様に考えて、

$$K^{\sigma} = \mathbb{C}\left(x^5, \frac{y}{x^2}, \frac{z}{x^3}\right)$$ となる。