

4.8.2 (1)  $m$  は奇数  $(-1)^m + 1 = -1 + 1 = 0$  とある。

$x^m + 1$  は  $x+1$  で割り切れる。

よって  $x^m + 1 = (x+1)(x^{m-1} - x^{m-2} + \dots - x + 1)$  ← 一般公式

$$x > 1 \text{ より } x+1 > 2$$

ゆえに  $x^m + 1$  は素数ではない。

$x+1 > 0$  より  $-1$  の可能性はない  
で割り切れることになる。

$$\therefore x(x^{m-2} - x^{m-3} + \dots - 1) = 0 \text{ とある}$$

$$x \neq 0 \text{ で } x^{m-2} - x^{m-3} + \dots - 1 = 0$$

$$x(x^{m-3} - x^{m-4} + \dots + 1) = 1$$

$x > 1$  で  $x$  は整数なので、 $x$  は存在しない。

( $x=0$  として  $x^m + 1$  は素数ではない。

(2)  $n \in \mathbb{N}$  により  $2^n + 1$  が素数とある。

$n = 2^c d$  ( $c$  は  $0$  以上  $n$  の整数,  $d$  は正の奇数) とおける。

$$2^n + 1 = 2^{2^c d} + 1$$

$$= (2^{2^c})^d + 1$$

$c$  は自然数より  $0$  以上  $n$  の整数とある。

$d \neq 1$  ならば (1) より  $2^n + 1$  は素数ではないので、 $d=1$  と仮定される。

( $x=0$  として

$2^{2^c} + 1$  という形になる。