$\boxed{4.1.4}$ (1) $\sqrt{5+2\sqrt6} = \sqrt{(\sqrt3+\sqrt2)^2} = \sqrt2+\sqrt3$

(2) $\sqrt{a+b+2\sqrt{ab}} = \sqrt{(\sqrt a+\sqrt b)^2} = \sqrt a+\sqrt b$ より

これが成り立つのは $a, b > 0$ のときのみ
例えば $a=-2$, $b=-3$ としてみると
$\sqrt{-2-3+2\sqrt6} = \sqrt3 i - \sqrt2 i = \sqrt2 i + \sqrt3 i$
or $-\sqrt3 i + \sqrt2 i$ となり矛盾。

$\mathbb{Q}(\sqrt{a+b+2\sqrt{ab}}) \subset \mathbb{Q}(\sqrt a, \sqrt b)$ は明らか。

また $t = \sqrt a + \sqrt b$ とおくと $t - \sqrt a = \sqrt b$

$t^2 - 2\sqrt a t + a = b$

明らかに $t \neq 0$ より $t - 2\sqrt a = \dfrac{b-a}{t}$

$\sqrt a = \dfrac12\left(t - \dfrac{b-a}{t}\right)$

よって $\sqrt a \in \mathbb{Q}(\sqrt{a+b+2\sqrt{ab}})$, $\sqrt b = \sqrt a + \sqrt b - \sqrt a$ より $\sqrt b \in \mathbb{Q}(\sqrt{a+b+2\sqrt{ab}})$

ゆえに $\mathbb{Q}(\sqrt a, \sqrt b) \subset \mathbb{Q}(\sqrt{a+b+2\sqrt{ab}})$

したがって $\mathbb{Q}(\sqrt a, \sqrt b) = \mathbb{Q}(\sqrt{a+b+2\sqrt{ab}})$

(したがってこの解答は不十分であるが
ここと同様の方法で
$\mathbb{Q}(\sqrt a, \sqrt b) = \mathbb{Q}(\sqrt{a+b+2\sqrt{ab}})$
については示せる。

(3) $b=0$ とすると問題文の $\frac ab$ が定義できないので $b \neq 0$。

$a=0$ とすると $\frac ab = 0 = 0^2 \in (\mathbb{Q}^\times)^2$ となるので $a \neq 0$ である。面倒なので省略する。

このとき $\sqrt a \in \mathbb{Q}$ とすると $a \in (\mathbb{Q}^\times)^2$ となるので $\sqrt a \notin \mathbb{Q}$ であるが

$(\sqrt a)^2 - a = 0$ より $[\mathbb{Q}(\sqrt a) : \mathbb{Q}] = 2$

また $\sqrt b \in \mathbb{Q}(\sqrt a)$ とすると $\{1, \sqrt a\}$ は $\mathbb{Q}(\sqrt a)$ の基底より

$\sqrt b = x + y\sqrt a$ $(x, y \in \mathbb{Q})$ とおける。

$\sqrt a$ のときと同様にして $\sqrt b$ が無理数であることを示せるので、有理、無理を比較して

$x = 0$, $y\sqrt a = \sqrt b$

$y\sqrt a = \sqrt b$ より $y = \sqrt{\frac ba}$。これは $\frac ba \in (\mathbb{Q}^\times)^2$ に矛盾。

したがって $\sqrt b \notin \mathbb{Q}(\sqrt a)$ であるが、$(\sqrt b)^2 - b = 0$ より $[\mathbb{Q}(\sqrt a, \sqrt b), \mathbb{Q}(\sqrt a)] = 2$

これより $|\mathrm{Gal}(\mathbb{Q}(\sqrt{a+b+2\sqrt{ab}})/\mathbb{Q})| = [\mathbb{Q}(\sqrt a, \sqrt b) : \mathbb{Q}] = 4$ である

$\mathrm{Gal}(\mathbb{Q}(\sqrt a, \sqrt b)/\mathbb{Q})$ の元は $\sqrt2$, $\sqrt3$ を共役なものへ移し、$\mathbb{Q}(\sqrt a, \sqrt b)$ の生成元は

$\sqrt a$, $\sqrt b$ より、$\sigma, \tau \in \mathrm{Gal}(\mathbb{Q}(\sqrt a, \sqrt b)/\mathbb{Q})$ で

$\sigma(\sqrt2) = -\sqrt2$, $\sigma(\sqrt3) = \sqrt3$, $\tau(\sqrt2) = \sqrt2$, $\tau(\sqrt3) = -\sqrt3$ となるものが存在し

$\mathrm{Gal}(\mathbb{Q}(\sqrt a, \sqrt b)/\mathbb{Q}) = \{1, \sigma, \tau, \sigma\tau\}$ とかける。

ここで $\mathrm{Gal}(\mathbb{Q}(\sqrt a, \sqrt b)/\mathbb{Q})$ の元はどの元も位数4未満で

位数4の群は $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$ か $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ に同型なので

$\mathrm{Gal}(\mathbb{Q}(\sqrt{a+b+2\sqrt{ab}})/\mathbb{Q}) \cong \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ となる