$\boxed{3.1.6}$ (1) a_1とnが互いに素なので、$a_1x + ny = 1$となる
整数x, yが存在する。

このとき、$\sqrt[n]{d} \in K$より$(\sqrt[n]{d})^x \in K$である

そして $(\sqrt[n]{d})^x = \left(\sqrt[n]{p_1^{a_1} \cdots \cdots p_t^{a_t}}\right)^x$

$$= \sqrt[n]{p_1^{a_1x} p_2^{a_2x} \cdots p_t^{a_tx}}$$

$a_1x = 1 - ny$より $= \sqrt[n]{p_1^{1-ny} p_2^{a_2x} \cdots p_t^{a_tx}}$

$$= \frac{\sqrt[n]{p_1 p_2^{a_2x} \cdots p_t^{a_tx}}}{p_1^y}$$

よって $\sqrt[n]{p_1 p_2^{a_2x} \cdots p_t^{a_tx}} = p_1^y (\sqrt[n]{d})^x \in K$となるので
d'として $d' = p_1 p_2^{a_2x} \cdots p_t^{a_tx}$をとってくればよい。

(2) (1)のd'について考える。(1)より明らかに$K' = \mathbb{Q}(\sqrt[n]{d'}) \subset K$である
$x^n - d = 0$は$\sqrt[n]{d}$を解にもつ方程式の一つなので、
$[K : \mathbb{Q}] \leqq n$であることが分かる。
また $[K : \mathbb{Q}] = [K : K'][K' : \mathbb{Q}]$であり
多項式 $x^n - d' = x^n - p_1 p_2^{a_2x} \cdots p_t^{a_tx}$について、
アイゼンシュタインの既約判定法よりこれはQ上既約
ゆえに $[K' : \mathbb{Q}] = n$であるので
$[K : \mathbb{Q}] = [K : K']n \geqq n$
よって $[K : \mathbb{Q}] = n$となる。