

4.5.1 問題 99 項式 $f(x)$ とおく

$$(1) f(1) = -1, f(-1) = -1 + 1 + 4 + 1 = 5 \quad \text{r'l}$$

$f(x)$ は K 上既約

$$\text{よって } (x-4) - 3 \cdot 1 = -4 - 3 = -7$$

$$(-4)^3 + 9 \cdot 1 - 6 \cdot (-4) + 1 = -64 + 9 + 24 + 1 = -30$$

$$\text{よって } g(x) = x^2 - 7x - 30$$

$$= (x+3)(x-10)$$

$g(x)$ は既約

$$\text{よって } \text{Gal}(L/\mathbb{Q}) \cong \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$$

$$(2) f(1) = -1, f(-1) = -1 \quad \text{r'l} \quad f(x) \text{ は既約}$$

$$\text{よって } (-3) - (-1) = 3$$

$$+1 + 9 = 8 \quad \text{r'l}$$

$$g(x) = x^2 + 3x + 8$$

$$= (x + \frac{3}{2})^2 - \frac{9}{4} + 8$$

$$= (x + \frac{3}{2})^2 - \frac{7}{4} \quad \text{既約}$$

$$\text{Gal}(L/\mathbb{Q}) \cong G_3$$

$$x^3 - 1 = (x-1)(x^2+x+1)$$

$$(3) f(x) \text{ はアイゼンシュタインの判定法より既約}$$

$$-3 - (-2) = 6$$

$$9 \cdot 4 + 8 \cdot (-2) = 36 - 16 = 20$$

$$g(x) = x^2 + 6x + 20$$

$$= (x+3)^2 + 11$$

既約

$$\text{Gal}(L/\mathbb{Q}) \cong G_3$$

$$(4) f(1) = -1, f(-1) = 1 \quad \text{r'l} \quad f(x) \text{ は既約}$$

$$\text{よって } (-2) - 3 \cdot (-1) = 1$$

$$(-2)^3 + 9 - 6 \cdot 2 + 1 = -8 + 9 - 12 + 1 = -12$$

$$g(x) = x^2 + x - 12$$

$$= (x+4)(x-3)$$

よって

$$\text{Gal}(L/\mathbb{Q}) \cong \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$$