

1.11.11

$$4 = 2 \cdot 2 \quad \text{17 日 月 3 日}$$

2 は $\mathbb{Z}[\sqrt{-1}]$ における既約元 (P 67, 今題 1.11.43)

$$2 = (a + b\sqrt{-1})(c + d\sqrt{-1}) \quad \text{と仮定}$$

$a, b, c, d \in \mathbb{Z}$ が存在する。ただし、 $a + b\sqrt{-1}, c + d\sqrt{-1}$ は単元でない

両辺のノルムを取ると、

$$4 = (a^2 + b^2)(c^2 + d^2)$$

$$4 = 2 \cdot 2 \quad \text{より} \quad a^2 + b^2 = c^2 + d^2 = 2 \quad \text{17 日 月 3 日} \quad (\mathbb{Z} \text{ 内で考えられている})$$

$$a^2 + b^2 = 2 \quad a^2, b^2 \geq 0, \quad a, b \in \mathbb{Z}$$

$$a = b = 1$$

同様に

$$c = d = 1$$

したがって

$$4 = (1 + \sqrt{-1})^4 \quad \text{と分解できる}$$

$$\text{仮に} \quad 1 + \sqrt{-1} = xy \quad x, y \in \mathbb{Z}[\sqrt{-1}] \quad \text{と仮定すると}$$

$$\text{ノルムを取ると} \quad 2 = N(x)N(y) \quad \text{17}$$

$N(x)$ と $N(y)$ の値は 2 しかあり得ない。したがって、 x, y の値は単元。

すなわち $(1 + \sqrt{-1})$ は既約元であり、一意分解環の素元である。

$$4 \text{ の素元分解は } 4 = (1 + \sqrt{-1})^4 \quad \text{と仮定}$$

したがって、4 の約数は $\pm (1 + \sqrt{-1})^i, \pm \sqrt{-1} (1 + \sqrt{-1})^i \quad (i = 0, 1, \dots, 4)$

(素元分解の組み合わせに(単元)を付け加える)