$\boxed{4.12.1}$ K の基底を $\{1, \sqrt[3]{2}, \sqrt[3]{4}\}$ に固定する。

(1)

$$1 \longrightarrow 1 + 0\cdot\sqrt[3]{2} + \sqrt[3]{4}$$
$$\sqrt[3]{2} \longrightarrow 2 + 1\cdot\sqrt[3]{2} + 0\cdot\sqrt[3]{4}$$
$$\sqrt[3]{4} \longrightarrow 0 + 2\cdot\sqrt[3]{2} + \sqrt[3]{4}$$

よって $M_{1+\sqrt[3]{4}}$ の表現行列は $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ より

$$\mathrm{Tr}_{K/\mathbb{Q}}(\sqrt[3]{4}+1) = 3, \quad N_{K/\mathbb{Q}}(\sqrt[3]{4}+1) = 5$$

$\mathrm{Tr}_{K/\mathbb{Q}}(\sqrt[3]{4}+1) = 1+\sqrt[3]{4} + 1+\omega^2\sqrt[3]{4} + 1+\omega\sqrt[3]{4} = 3$ となる。

[別]

(1) では $\mathrm{ch}\,\mathbb{Q} = 0$ より どんな元も分離的になる。

よって ~~[illegible]~~ $[L:K]$ に ~~[illegible]~~ である

ゆえに $[L:K]_s = [L:K]$

$|\mathrm{Hom}(L:K)| = 3$ となる。

この3は明らかに $\sigma(\sqrt[3]{2}) = \sqrt[3]{2}, \sqrt[3]{2}\omega, \sqrt[3]{2}\omega^2$ であることからわかる。

(2)

$$1 \longrightarrow 0 + (-2)\cdot\sqrt[3]{2} + \sqrt[3]{4}$$
$$\sqrt[3]{2} \longrightarrow 2 + 0\cdot\sqrt[3]{2} + (-1)\cdot\sqrt[3]{4}$$
$$\sqrt[3]{4} \longrightarrow -4 + 2\cdot\sqrt[3]{2} + 0\cdot\sqrt[3]{4}$$

よって $M_{\sqrt[3]{4}-2\sqrt[3]{2}}$ の表現行列は $\begin{pmatrix} 0 & 2 & -4 \\ -2 & 0 & 2 \\ 1 & -2 & 0 \end{pmatrix}$ より

$$\mathrm{Tr}_{K/\mathbb{Q}}(\sqrt[3]{4} - 2\sqrt[3]{2}) = 0 \qquad N_{K/\mathbb{Q}}(\sqrt[3]{4} - 2\sqrt[3]{2}) = -12.$$

(3) 教科書参照