$\boxed{2.8.3}$ まず $H_1(H_2\cap K_1)$ が G の部分群になることを示す。

$1\in H_1(H_2\cap K_1)$ は自明

$h_1, h_1'\in H_1$, $l, l'\in H_2\cap K_1$ とおくと

$$(h_1 l)(h_1' l') = h_1 l h_1' l'$$

$H_1 \triangleleft H_2$ で $l\in H_2$ より $l h_1' = h_1'' l$ となる $h_1''\in H_1$ が存在。

よって $(h_1 l)(h_1' l') = h_1 h_1'' l l' \in H_1(H_2\cap K_1)$

故に $H_1(H_2\cap K_1)$ は積について閉じている。

また $h_1 l$ について $(h_1 l)^{-1} = l^{-1}h_1^{-1}$

$= h_1' l^{-1}$ ← $H_1\triangleleft H_2$ よりこれを満たす $h_1'\in H_1$ が存在。

よって $(h_1 l)^{-1}\in H_1(H_2\cap K_1)$

したがって $H_1(H_2\cap K_1)$ は部分群である

同様にして $H_1(H_2\cap K_1)$, $(H_1\cap K_2)K_1$, $(H_2\cap K_2)K_1$ も部分群である。

次に $H_1(H_2\cap K_1) \triangleleft H_1(H_2\cap K_2)$ を示す。

$K_1\subset K_2$ より $H_1(H_2\cap K_1)\subset H_1(H_2\cap K_2)$ は OK.

次に $h_1, h_1'\in H_1$, $l\in H_2\cap K_2$, $m\in H_2\cap K_1$ をとってくる。

すると $(h_1 l)(h_1' m)(h_1 l)^{-1} = h_1 l h_1' m l^{-1} h_1^{-1}$

$= h_1(l h_1' l^{-1})\{(l m l^{-1}) h_1^{-1} (l m l^{-1})^{-1}\}(l m l^{-1})$

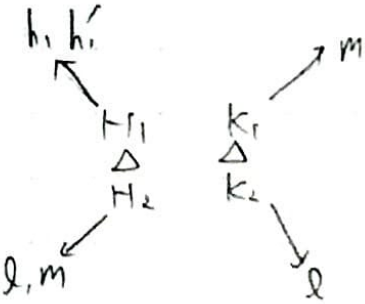
まず $H_1\triangleleft H_2$ より $l h_1' l^{-1} = h_1''\in H_1$ とおける

そして $l, m\in H_2$ より $(l m l^{-1})\in H_2$ で

$H_1\triangleleft H_2$ より $(l m l^{-1}) h_1^{-1} (l m l^{-1})^{-1} = h_1'''\in H_1$ とおける

最後に $(l m l^{-1})\in H_2$ で $K_1\triangleleft K_2$ より

$l m l^{-1} = m'\in K_1\cap H_2$ とおける。



よって $(h_1 l)(h_1' m)(h_1 l)^{-1} = h_1 h_1'' h_1''' m' \in H_1(H_2\cap K_1)$.

したがって $H_1(H_2\cap K_1) \triangleleft H_1(H_2\cap K_1)$

同様に $(H_1\cap K_2)K_1 \triangleleft (H_2\cap K_2)K_1$

同様にして部分群の証明について、一般に $A\triangleleft B \Rightarrow A(B\cap C)$

(C は G の部分群) が成立つ

$A\to N$, $B\to G$, $C\to H$ とおくと $N\triangleleft G \Rightarrow N(G\cap H)$

$= NH$ となり

I. 命題

これは 2.10.3 の定理を包含している

ここで $H_2\cap K_2 \supset H_2\cap K_1$ より $H_1(H_2\cap K_2) = H_1(H_2\cap K_1)(H_2\cap K_2)$

$$\underset{N}{\overset{A}{(H_2\cap K_2)}} \cap \underset{L}{\overset{B}{H_1}}\overset{C}{(H_2\cap K_1)} = \overset{(A\ \cap\ B)}{\{(H_2\cap K_2)\cap H_1\}}\overset{(A\ \cap\ C)}{(H_2\cap K_2\cap H_2\cap K_1)}$$

$$= \{(H_2\cap K_2)\cap H_1\}(H_2\cap K_1)$$

$$= (H_1\cap K_2)(H_2\cap K_1)$$

一般に $B\subset A$ or $C\subset A$ $\Rightarrow$ $A\cap BC = (A\cap B)(A\cap C)$ が成り立つ

よって $H_1(H_2\cap K_1) \triangleleft H_1(H_2\cap K_2)$ より 第二同型定理から

このページの一番上の式使用

$$\frac{\boxed{H_1(H_2\cap K_1)}\boxed{(H_2\cap K_2)}}{\boxed{H_1(H_2\cap K_1)}} \cong \frac{\boxed{H_2\cap K_2}}{\boxed{(H_2\cap K_2)}\cap \boxed{H_1(H_2\cap K_1)}}$$

このページの~~[illegible]~~上から二番目を使用

$$\frac{H_1(H_2\cap K_2)}{H_1(H_2\cap K_1)} \cong \frac{H_2\cap K_2}{(H_1\cap K_2)(H_2\cap K_1)}$$

$\dfrac{H_2\cap K_2}{(H_1\cap K_2)(H_2\cap K_1)}$ は H, K に関して対称なので.

つまり $H_1 \leftrightarrow K_1$, ~~[illegible]~~ $H_2 \leftrightarrow K_2$ としても変わらないということ

$$\frac{H_1(H_2\cap K_2)}{H_1(H_2\cap K_1)} \cong \frac{(H_2\cap K_2)K_1}{(H_1\cap K_2)K_1}$$

← $K_1(H_2\cap K_2) = (H_2\cap K_2)K_1$ が成り立つのは $K_1 \triangleleft K_1(H_2\cap K_2)$ より保証されているので大丈夫.