$\boxed{1.7.2}$

P_1が素イデアル $\Longleftrightarrow$ $\dfrac{\mathbb{Z}[\sqrt{5}]}{P_1}$ が整域。

P28、例1.4.10 より $\dfrac{\mathbb{Z}[\sqrt{5}]}{P_1} \cong \dfrac{\mathbb{Z}[x]/(x^2-5)}{(5, x^2-5)/(x^2-5)}$

第三同型定理より $\dfrac{\mathbb{Z}[x]/(x^2-5)}{(5, x^2-5)/(x^2-5)} \cong \dfrac{\mathbb{Z}[x]}{(5, x^2-5)} = \dfrac{\mathbb{Z}[x]}{(5, x^2)} \cong \dfrac{\mathbb{Z}[x]/(5)}{(x^2)/(5)}$

P28、命題1.4.11より $\dfrac{\mathbb{Z}[x]/(5)}{(x^2)/(5)} \cong \dfrac{\mathbb{Z}/5\mathbb{Z}[x]}{(x^2)}$

よって $\dfrac{\mathbb{Z}/5\mathbb{Z}[x]}{(x^2)}$ が整域であるかを調べればよい。

$\dfrac{\mathbb{Z}/5\mathbb{Z}[x]}{(x^2)}$ の代表元は $\bar{n}x+\bar{m}$ $(\bar{n}, \bar{m} \in \mathbb{Z}/5\mathbb{Z})$ という形で表されるので

$\dfrac{\mathbb{Z}/5\mathbb{Z}[x]}{(x^2)}$ の剰余類と $\bar{n}x+\bar{m}$を同一視してもよい。

$\bar{a} \in \mathbb{Z}/5\mathbb{Z}(\bar{a} \neq \bar{0})$ に対し、 $\bar{a}x\ (\neq \bar{0})$ とすると $x^2=\bar{0}$ より

$\bar{a}x \cdot x = \bar{0}$

特に $\bar{a}x$ は $\bar{0}$でない零因子となるので、 P_1は素イデアルでない。

P_2についても同様にして $\dfrac{\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}[x]}{(x^2-2)}$ が整域であるかを調べればよい。

$\bar{a}, \bar{b} \in \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$ $(\bar{a} \neq 0$ 或いは $\bar{b} \neq \bar{0})$ に対し、$\bar{n}x+\bar{m}$ が存在して

$(\bar{a}x+\bar{b})(\bar{n}x+\bar{m}) = \bar{0}$ が成り立つとすると

$x^2=\bar{2}$ に注意して $\overline{2an} + (\overline{am}+\overline{nb})x + \overline{mb} = \bar{0}$

$$\begin{cases} \overline{2an} + \overline{mb} = \bar{0} & \cdots ① \\ \overline{am} + \overline{nb} = \bar{0} & \cdots ② \end{cases}$$

①$\times n$ $-$ ②$\times m$ より

$$\begin{array}{rl} & \overline{2an^2} + \overline{mnb} = \bar{0} \\ - & \overline{am^2} + \overline{mnb} = \bar{0} \\ \hline & \bar{a}(\overline{2n^2 - m^2}) = \bar{0} \end{array}$$

[1] $\bar{a}=0$ のとき ①,② より $\overline{mb} = \overline{nb} = \bar{0}$で $\bar{b} \neq \bar{0}$ $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$は整域なので $\bar{n}=\bar{m}=\bar{0}$

[2] $\bar{a} \neq 0$ のとき $\overline{2n^2} = \overline{m^2}$ $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$ では $\bar{m} \neq \bar{n} \neq \bar{0}$ と仮定すると

$\bar{n}^2 = \overline{m^2} = \bar{1}$ となるので、矛盾。 よって $\bar{n}=\bar{m}=\bar{0}$

[1], [2] より $\bar{n}=\bar{m}=\bar{0}$ であるので、$(\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}[x])/(x^2-2)$の零因子は 0のみ であり、整域である。

したがって P_2は 素イデアル。