$\boxed{2.6.6}$ (1)

$$X^2 = \begin{pmatrix}0&-1\\1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&-1\\1&0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-1&0\\0&-1\end{pmatrix} = -I_2$$

$$\begin{aligned}Y^3 &= \begin{pmatrix}0&1\\-1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&1\\-1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&1\\-1&1\end{pmatrix}\\ &= \begin{pmatrix}-1&1\\-1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&1\\-1&1\end{pmatrix}\\ &= \begin{pmatrix}-1&0\\0&-1\end{pmatrix}\\ &= -I_2\end{aligned}$$

$\begin{pmatrix}1&1\\0&1\end{pmatrix} = R_{2,12}(1)$ であることを使うと一瞬で計算できる.

$$Z^5 = \begin{pmatrix}1&1\\0&1\end{pmatrix}^5 = \begin{pmatrix}1&5\\0&1\end{pmatrix} = I_2$$

$$\begin{pmatrix}0&-1\\1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&1\\-1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&1\\0&1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0&-1\\1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&1\\-1&0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix} = I_2$$

よって $X^2 = Y^3 = Z^5 = XYZ = 1$ である

(2)

$$\begin{aligned}ZXZ &= \begin{pmatrix}1&1\\0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&-1\\1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&1\\0&1\end{pmatrix}\\ &= \begin{pmatrix}1&1\\0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&-1\\1&1\end{pmatrix}\\ &= \begin{pmatrix}1&0\\1&1\end{pmatrix}\end{aligned}$$

こちらも $R_{2,12}(1)$ を意識すると $\begin{pmatrix}1&0\\1&1\end{pmatrix} = \underbrace{(X, Y, Z)}$ となる (X, Y, Z) の積で見つけやすい.

また $\begin{pmatrix}1&0\\1&1\end{pmatrix}^i = \begin{pmatrix}1&1\\i&0\end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix}1&1\\0&1\end{pmatrix}^i = \begin{pmatrix}1&i\\0&1\end{pmatrix}$ $(i = 1, 2, 3, 4)$ である

よって $\langle X, Y, Z\rangle \supset U$ (命題 2.6.14 P115 の U) となるので

$\langle X, Y, Z\rangle = SL_2(\mathbb{F}_5)$ となり $\langle x, y, z\rangle = PSL_2(\mathbb{F}_5)$

また $G = \langle x, y, z \mid x^2 = y^3 = z^5 = xyz = 1\rangle$ とおくと G から $PSL_2(\mathbb{F}_5)$ への全射準同型が存在する. 演習問題 1.4.6. (10) より $|G| = 60$ で

$$\begin{aligned}|PSL_2(\mathbb{F}_5)| &= \frac{|SL_2(\mathbb{F}_5)|}{GCD(2, 4)}\\ &= \frac{1}{2} \times \frac{1}{4} \times |GL_2(\mathbb{F}_5)|\\ &= \frac{1}{8} \times (5^2-1)(5^2-5) = 60\end{aligned}$$

よって $|G| = |PSL_2(\mathbb{F}_5)|$

したがって $PSL_2(\mathbb{F}_5) \cong A_5$