$\boxed{4.1.2}$ (1) $\alpha = \sqrt{2+\sqrt{2}}$ より

$$\alpha^2 = 2+\sqrt{2}$$
$$\alpha^2 - 2 = \sqrt{2}$$
$$\alpha^4 - 4\alpha^2 + 4 = 2$$
$$\alpha^4 - 4\alpha^2 + 2 = 0$$

$x^4 - 4x^2 + 2$ はアイゼンシュタインの判定法より、$\mathbb{Q}$ 上既約なので

求める最小多項式は $x^4 - 4x^2 + 2$.

(2) $\mathrm{ch}\,\mathbb{Q} = 0$ より $\mathbb{Q}(\alpha)$ は分離拡大。

ここで (1) と逆の手順で $x^4 - 4x^2 + 2 = 0$ を解くと $x = \pm\sqrt{2\pm\sqrt{2}}$ となるので

α の共役は $\pm\sqrt{2\pm\sqrt{2}}$ である.

ここで $\sqrt{2} = \alpha\beta$ であり, $\alpha^2 - 2 = \sqrt{2}$ であるので.

$\alpha^2 - 2 = \alpha\beta$ すなわち $\alpha - \frac{2}{\alpha} = \beta$ となるので $\mathbb{Q}(\alpha) \ni \beta$

故に $\mathbb{Q}(\alpha)/\mathbb{Q}$ は正規拡大となる.

したがって $\mathbb{Q}(\alpha)/\mathbb{Q}$ はガロア拡大.

(3) (2) より $\phi(\alpha^2 - 2) = \phi(\sqrt{2})$ であるので $\phi(\sqrt{2}) = \phi(\alpha)^2 - 2 = -\sqrt{2}$.

(4) $|\mathrm{Gal}(\mathbb{Q}(\alpha):\mathbb{Q})| = [\mathbb{Q}(\alpha):\mathbb{Q}] = 4$ である.

また $\phi(\alpha) = \pm\alpha, \pm\beta$ となる $\phi \in \mathrm{Gal}(\mathbb{Q}(\alpha)/\mathbb{Q})$ がそれぞれ存在し,

$\mathbb{Q}(\alpha)$ の生成元は α なので $\mathrm{Gal}(\mathbb{Q}(\alpha)/\mathbb{Q})$ の元はこれらに限る

$\alpha_1 = \alpha,\ \alpha_2 = -\alpha,\ \alpha_3 = \beta,\ \alpha_4 = -\beta$ とおくと.

$\mathrm{Gal}(\mathbb{Q}(\alpha)/\mathbb{Q})$ は $\alpha_i\ (i=1,2,3,4)$ をその共役に移すので

置換表現 $\sigma : \mathrm{Gal}(\mathbb{Q}(\alpha)/\mathbb{Q}) \longrightarrow \mathfrak{S}_4$ が定まる.

$\mathbb{Q}(\alpha)$ は $\mathbb{Q}$ 上 α によって生成されるので $\ker\sigma = 1$ となるので、これは単射であり

置換表現なので準同型

ここで $\phi_i(\alpha_1) = \alpha_i\ (i=1,2,3,4)$ として $\mathrm{Gal}(\mathbb{Q}(\alpha)/\mathbb{Q})$ の元を $\{\phi_1, \phi_2, \phi_3, \phi_4\}$ とおくと.

$$\sigma(\phi_1) = 1_{\mathfrak{S}_4} \qquad \sigma(\phi_2) = (12)(34)$$
$$\sigma(\phi_3) = (1324) \qquad \sigma(\phi_4) = (1423)$$

$\sigma(\phi_3)$ の位数は4であるので σ は $\mathrm{Gal}(\mathbb{Q}(\alpha)/\mathbb{Q}) \longrightarrow \langle\sigma(\phi_3)\rangle$ の同型を作り

$\langle\sigma(\phi_3)\rangle \cong \mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$ である.

したがって

$$\mathrm{Gal}(\mathbb{Q}(\alpha)/\mathbb{Q}) \cong \mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$$

この行き先は $\alpha\beta = \sqrt{2}$ より

$\beta = \frac{\sqrt{2}}{\alpha}$ となり

α の行き先が決まると β の行き先が決まるように

なることから β の行き先等も求めた.