$\boxed{2.4.5}$ (1) $\mathbb{Z}[\sqrt{-5}] \cong \mathbb{Z}[x]/(x^2+5)$ であるので $\mathbb{Z}[x]/(x^2+5)$ で考える

このとき $\mathbb{Z}[x]/(x^2+5)$ において、I に対応するイデアル I' は

$$I' = (2, x+1) \text{ である.}$$

$\mathbb{Z}[x]/(x^2+5)$ においては 元を $ax+b$ $(a, b \in \mathbb{Z})$ とみなすことができる.

よって I' が $I' = (ax+b)$ という単項イデアルになるとすると $2 \in I'$ より

$$(ax+b)(cx+d) = 2 \text{ となる}$$

$c, d \in \mathbb{Z}$ が存在する.

この式より $(da+cb)x + (-5ca+db) = 2.$

すなわち
$$\begin{cases} da+cb = 0 & \cdots ① \\ -5ca+db = 2 & \cdots ② \end{cases}$$
を満たす $c, d \in \mathbb{Z}$ が存在する.

①、② を c, d の連立方程式として解くと

$a \neq 0$ かつ $b \neq 0$ のとき $c = -\dfrac{2a}{a^2+5b^2}$, $d = \dfrac{2b}{a^2+5b^2}$

$a = 0$ かつ $b \neq 0$ $c = 0$, $d = \dfrac{2}{b}$

$a \neq 0$ かつ $b = 0$ $c = \dfrac{2}{-5a}$ $d = 0$

$a = 0$ かつ $b = 0$ 解なし

よって $a \neq 0$ または $b \neq 0$ である。

これし、$a \neq 0$ かつ $b \neq 0$ のとき $0 < 4b^2 < 5b^4 < (a^2+5b^2)^2$ より

$0 < \left|\dfrac{2b}{a^2+5b^2}\right| < 1$ であるので これは $d \in \mathbb{Z}$ に矛盾

また $a = 0$, $d = \dfrac{2}{b}$ のときは $d \in \mathbb{Z}$ になるためには b は 2 の約数でなければならないので

$b = \pm 1, \pm 2$ $b = \pm 1$ のときは

I' は $\mathbb{Z}[x]/(x^2+5)$ に一致するので矛盾.

$b = \pm 2$ のときはどちらも $I' = (2)$ と書ける

$a \neq 0$, $b = 0$ のときは $c \notin \mathbb{Z}$ より 矛盾.

これらより I' が単項イデアルなら $I' = (2)$ となる

けれども、明らかに $(2) \neq (2, x+1)$ なので 矛盾.

したがって 題意は示された.

(2). $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \in \ker\phi$ とすると $a, b \in A^2$ より

$a = x + \sqrt{-5}y$, $b = z + \sqrt{-5}w$ $(x, y, z, w \in \mathbb{Z})$ とおけ

$2a + (1+\sqrt{-5})b = 0$ が成り立つ

よって $2x + 2y\sqrt{-5} + z + w\sqrt{-5} + z\sqrt{-5} - 5w = 0$

$(2x + z - 5w) + (2y + w + z)\sqrt{-5} = 0$

$$\begin{cases} 2x + z - 5w = 0 & \text{①} \\ 2y + w + z = 0 & \text{②} \end{cases}$$

① − ② より　$2x - 2y - w - 5w = 0$

$$6w = 2x - 2y$$

$$3w = x - y$$

$$x = y + 3w$$

①に代入して　$2y + 6w + z - 5w = 0$

$$z = -2y - w$$

よって

$$\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x + y\sqrt{-5} \\ z + w\sqrt{-5} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} y + 3w + y\sqrt{-5} \\ -2y - w + w\sqrt{-5} \end{pmatrix}$$

$$= y \begin{pmatrix} 1 + \sqrt{-5} \\ -2 \end{pmatrix} + w \begin{pmatrix} 3 \\ -1 + \sqrt{-5} \end{pmatrix}$$ となるので

$$\ker\phi \subset \langle (1+\sqrt{-5}, -2), (3, -1+\sqrt{-5}) \rangle$$

この逆も逆の手順を踏めば示せるので　$\ker\phi = \langle (1+\sqrt{-5}, 2), (3, -1+\sqrt{-5}) \rangle$ となり、

求める生成元は　$(-1+\sqrt{-5}, 2)$, $(3, -1+\sqrt{-5})$ である。