$\boxed{4.9.1}$ 「演習 4.1.4 の(3)を クンマー理論を使って解け」

p.237 例 4.9.8 と同様に解く。

$\mathbb{Q}^\times/(\mathbb{Q}^\times)^2$ 内で a, b が生成する部分群 $H/(\mathbb{Q}^\times)^2$

剰余群 $a\mathbb{Q}^\times$ を単に a と書くようにする。

$a^x b^y$ で $(x, y \in \mathbb{Z})$ $x<0, y<0$ なら $a^2, b^2 \in (\mathbb{Q}^\times)^2$ を

複数回かけることで $a^x b^y$ $(x \geqq 0, y \geqq 0)$ の形にできる。

ゆえに $x \geqq 0, y \geqq 0$ として考える。 素因数の偶数乗は必要ない

$a, b \in \mathbb{Z}\setminus\{0\}$ より a, b の素因数分解を考えられる。素因数 p について $p^2 = 1$ なので

a の素因数のうち b の素因数でないもの $\to$ $p_1, p_2, \cdots, p_s$

a, b の両方の素因数 $\to$ $q_1, q_2, \cdots, q_t$ $\quad s, t, u \in \mathbb{N} \cup \{0\}$

b の素因数のうち a の素因数でないもの $\to$ $r_1, r_2, \cdots, r_u$

このとき $a^x b^y = p_1^x p_2^x \cdots p_s^x r_1^y r_2^y \cdots r_u^y q_1^{x+y} q_2^{x+y} \cdots q_t^{x+y}$

$\frac{a}{b} \notin (\mathbb{Q}^\times)^2$ という条件は s, u のうち少なくとも一方は 0 ではないという条件に表われている。

※ -1 倍の違いは無視している

素因数分解の一意性より $a^x b^y = 1 \iff x, y$ は偶数 なので

準同型 $\mathbb{Z}^2 \ni (x, y) \to a^x b^y \in H/(\mathbb{Q}^\times)^2$ についての

準同型定理より $H/(\mathbb{Q}^\times)^2 \cong (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) \times (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$

よってクンマー理論から

$\mathrm{Gal}(\mathbb{Q}(\sqrt{a}, \sqrt{b})/\mathbb{Q}) \cong (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) \times (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$