$\boxed{4.15.4}$ x^2+x+t の全ての根は $\alpha,\ \alpha+1$

$x^2+x+t+1$ の全ての根は $\beta,\ \beta+1$ とかけることに注目する。

(命題 4.13.1 の証明より)

$\alpha \in K$ とする。明らかに $\alpha \in \mathbb{F}_2$ で α は $\mathbb{F}_2[t]$ 上整より

$\alpha \in \mathbb{F}_2[t]$ で $\deg \alpha \geq 1$

$\alpha^2+\alpha+t=0$ より $1=2\deg\alpha$.

これは矛盾なので $\alpha \notin K$

よって x^2+x+t は K 上既約。また同様に $x^2+x+t+1$ も既約

故に $K(\alpha), K(\beta)$ はガロア拡大で $\mathrm{Gal}(K(\alpha)/K) \cong \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$

$$\mathrm{Gal}(K(\beta)/K) \cong \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$$

ガロア拡大の推移定理より $K(\alpha,\beta)/K$ もガロア拡大で

その前に $K(\alpha) \neq K(\beta)$ を示して $\mathrm{Gal}(K(\alpha,\beta)/K) \cong (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})\times(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$

そこで $\sigma, \tau \in \mathrm{Gal}(K(\alpha,\beta)/K)$, $\sigma(\alpha)=\alpha+1$, $\sigma(\beta)=\beta$

$K(\alpha)\cap K(\beta)=K$ を示す必要有 $\tau(\alpha)=\alpha$, $\tau(\beta)=\beta+1$ とおくと

$\mathrm{Gal}(K(\alpha,\beta)/K)=\{\sigma,\tau,\sigma\tau,1\}$ とかける

ので $\gamma=\alpha+t\beta$ について

$$\sigma(\gamma)=\alpha+1+t\beta$$
$$\tau(\gamma)=\alpha+t\beta+t$$
$$\sigma\tau(\gamma)=\alpha+1+t\beta+t$$ でこれらは互いに異なる

定理 3.7.1 より $K(\gamma)=K(\alpha,\beta)$ となる。

教科書解説の様 $\gamma=\alpha+\beta$ としたらどうなのかについては

$\sigma(\gamma)=\alpha+1+\beta$

$\tau(\gamma)=\alpha+\beta+1$

同じとなってしまうので定理 3.7.1 が使えない。