$\boxed{4.7.5}$

(1) ζ_9 と ζ_9^8 は複素共役なので $\zeta_9 + \zeta_9^8 = 2\cos\frac{2\pi}{9} = t$

ここで 三倍角の公式から $\cos\frac{2}{3}\pi = -3\cos\frac{2\pi}{9} + 4\cos^3\frac{2\pi}{9}$ であるので

$$-\frac{1}{2} = -\frac{3}{2}t + \frac{1}{2}t^3$$

$$t^3 - 3t + 1 = 0$$

より求める方程式の一つは $x^3 - 3x + 1$

(2) わざわざ $[\mathbb{Q}(\zeta_9) : \mathbb{Q}(t)] \leqq 2$ とする必要か分からないので、この解答にした

(2) (1) はアイゼンシュタインの判定法より既約なので、それが t の最小多項式となり $[\mathbb{Q}(t) : \mathbb{Q}] = 3$

(3) $[\mathbb{Q}(t) : \mathbb{Q}] = 3$ より $|H(\mathbb{Q}(t))| = 3$ であるが

$[\mathbb{Q}(\zeta_9) : \mathbb{Q}] = \phi(9) = 6 = |\mathrm{Gal}(\mathbb{Q}(\zeta_9)/\mathbb{Q})|$ より 指数から

$H(\mathbb{Q}(t))$ は $\mathrm{Gal}(\mathbb{Q}(\zeta_9)/\mathbb{Q})$ の正規部分群となるので $\mathbb{Q}(t)/\mathbb{Q}$ はガロア拡大.

よって $\mathrm{Gal}(\mathbb{Q}(t)/\mathbb{Q})$ を考えられる. $|\mathrm{Gal}(\mathbb{Q}(t)/\mathbb{Q})| = 3$ より

$\mathrm{Gal}(\mathbb{Q}(t)/\mathbb{Q}) \cong \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$ である.