$\boxed{4.8.1}$ (1) $\mathrm{Gal}(\mathbb{Q}(\zeta)/\mathbb{Q}) \cong (\mathbb{Z}/17\mathbb{Z})^\times \cong \mathbb{Z}/16\mathbb{Z}$ であることに注意して.

$$\sigma^2(\zeta) = \zeta^9$$
$$\sigma^4(\zeta) = \zeta^{9^2} = \zeta^{81} = \zeta^{13}$$
$$\sigma^8(\zeta) = \zeta^{13^2} = \zeta^{(-4)^2} = \zeta^{16}$$
$$\sigma^{16}(\zeta) = \zeta^{16^2} = \zeta^{(-1)^2} = 1$$

よって σの位数は16なので 題意は示された

(2)
$$\sigma(a) = \zeta^3 + \zeta^{10} + \zeta^5 + \zeta^{11} + \zeta^{14} + \zeta^7 + \zeta^{12} + \zeta^6$$
$$\sigma^2(a) = \zeta^9 + \zeta^{13} + \zeta^{15} + \zeta^{16} + \zeta^8 + \zeta^4 + \zeta^2 + \zeta$$
$$= a.$$

よって $\sigma(a)+a$, $\sigma(a)a$ は σによって不変な元であり

$\mathrm{Gal}(\mathbb{Q}(\zeta)/\mathbb{Q})$ は σによって生成されるので ガロアの基本定理より

$\sigma(a)+a,\ \sigma(a)a \in \mathbb{Q}$

ゆえに aは $\mathbb{Q}$上の2次方程式 $x^2 - (\sigma(a)+a)x + \sigma(a)a = 0$ を満たす.

(3)
$$\sigma^2(b) = \zeta^9 + \zeta^{15} + \zeta^8 + \zeta^2$$
$$\sigma^4(b) = \zeta^{13} + \zeta^{16} + \zeta^4 + \zeta$$
$$= b$$

$$\left[\begin{array}{l} 1 \to 3 \to 9 \to 10 \to 13 \to 5 \\ \to 15 \to 11 \to 16 \to 14 \to 8 \to 7 \\ \to 4 \to 12 \to 2 \to 6 \to 1 \end{array}\right]$$

よって $\sigma^2(b)+b$, $\sigma^2(b)b$ は σ^2 によって不変であり

$\mathbb{Q}(a)$ は $\langle\sigma^2\rangle$ の不変体であるので ガロアの基本定理より

$\sigma^2(b)+b,\ \sigma^2(b)b \in \mathbb{Q}(a)$

ゆえに bは $\mathbb{Q}(b)$ 上の2次方程式 $x^2 - (\sigma^2(b)+b)x + \sigma^2(b)(b) = 0$ を満たす

(4) $\sigma^4(c) = \zeta^{13} + \zeta^4$, $\sigma^8(c) = \zeta^{16} + \zeta = c$ より

$\sigma^4(c)+c$, $\sigma^4(c)c$ は σ^4 によって不変であり

$\mathbb{Q}(b)$ は $\langle\sigma^4\rangle$ の不変体であるので ガロアの基本定理より 題意は示された

(5) $\sigma^8(\zeta) = \zeta^{16}$ $\quad \sigma^{16}(\zeta) = \zeta$ より

$\sigma^8(\zeta)+\zeta$, $\sigma^8(\zeta)\zeta$ は σ^8 によって不変であり

$\mathbb{Q}(c)$ は $\langle\sigma^8\rangle$ の不変体なので ガロアの基本定理より 題意は示された

問題の解答にも書いてあるが,

~~[illegible]~~ $\mathbb{Q} \subset \mathbb{Q}(a) \subset \mathbb{Q}(b) \subset \mathbb{Q}(c) \subset \mathbb{Q}(\zeta)$ は 2次拡大.

$\subset \mathbb{C}$

ここから 複素数なので 定理4.5.4は使えないことに注意

別の定理を使う. 4.5.4の近くに資料をつくった(有)