$\boxed{1.11.14}$ (1) $1+\sqrt{-7} = (a+b\sqrt{-7})(c+d\sqrt{-7})$ $a,b,c,d \in \mathbb{Z}$ とおくと.

ノルムを考えて $8 = (a^2+7b^2)(c^2+7d^2)$

$a^2+7b^2 \geqq c^2+7d^2 \geqq 0$ としても一般性は失われないので.

$(a^2+7b^2, c^2+7d^2) = (8, 1), (4, 2)$

これらを解くと. $(a^2, b^2, c^2, d^2) = (1, 1, 1, 0)$

すなわち $(a, b, c, d) = (\pm1, \pm1, \pm1, 0)$

$c=\pm1$, $d=0$ より $1+\sqrt{-7}$ は既約元であることが言える.

(2) $8 = 4\cdot2 = (1+\sqrt{-7})(1-\sqrt{-7})$ である.

まず, 2が既約元であることを示す.

(1)と同様に $2 = (a+b\sqrt{-7})(c+d\sqrt{-7})$ とおくと

ノルムをとって $4=(a^2+7b^2)(c^2+7d^2)$

(1)と同様にして $(a, b, c, d) = (\pm2, 0, \pm1, 0)$

$c=\pm1$, $d=0$ より 2は既約元であることが示された.

ここで $\mathbb{Z}[\sqrt{-7}]$ が一意分解環と仮定すると.

2は素元となるので $4\cdot2 = (1+\sqrt{-7})(1-\sqrt{-7})$ より

$(2) \ni 1-\sqrt{-7}$ or $1+\sqrt{-7}$

$(2) \ni 1+\sqrt{-7}$ とすると $x, y \in \mathbb{Z}$ を用いて

$2(x+y\sqrt{-7}) = 1+\sqrt{-7}$ が成り立つ

$2x+2y\sqrt{-7} = 1+\sqrt{-7}$

よって $2x=1$ となるが $2x$は偶数, 1は奇数となり矛盾.

$(2) \ni 1-\sqrt{-7}$ についても同様.

したがって $\mathbb{Z}[\sqrt{-7}]$ は一意分解環とならない.

一意分解環でないことを示す王道としては $(1+\sqrt{-7})(1-\sqrt{-7})$ となる数を考えれば良さそう.