$\boxed{4.15.3}$ 問題文より x^3-x-t は K上既約である.
$f(x)$ の根を β とおくとする.

補題4.15.2は ⟹ に使用.

(1) 補題4.15.2より $\beta\in K(\alpha) \Leftrightarrow {}^{\exists}c_0\in K, {}^{\exists}c_1\in \mathbb{F}_3, \beta = c_0 + c_1\alpha$

このとき $\beta^3-\beta = c_0^3 + c_1^3\alpha^3 - c_0 - c_1\alpha$.

$$t^2 = c_0^3 + c_0 + c_1 t.$$

明らかに $c_0 \notin \mathbb{F}_3$, c_0 は $\mathbb{F}_3[t]$ 上整より $c_0\in\mathbb{F}_3[t]$. よって $\deg \alpha \geqq 1$ で

$$2 = 3\deg c_0$$ これは矛盾する.

したがって L は f の根を含まない

(2) (1)と同様に $\beta\in K(\alpha) \Leftrightarrow {}^{\exists}c_0\in K, {}^{\exists}c_1\in \mathbb{F}_3, \beta = c_0 + c_1\alpha$

このとき $\beta^3-\beta = c_0^3 + c_1^3\alpha^3 - c_0 - c_1\alpha$.

$$t^3 = c_0^3 - c_0 + c_1 t$$

実際 $c_0 = t$, $c_1 = 2$ がとれるので

L は f の根を含む.

演習4.15.2 の自分の解答のやり方よりもこっちの方が早いが、結局は定理4.15.4の $a_2 = c_0^p - c_0 + c_1 a_1$ の形になっていることが分かる