$\boxed{4.15.2}$ (1) 問題 より x^2+x+t は既約。

よって L は x^2+x+t の最小分解体

また $f(x)$ が根 $\alpha \in \mathbb{F}_2(t)$ を持つとすると、明らかに $\alpha \notin \mathbb{F}_2$ より $\deg\alpha \geq 1$ で

ここが $\mathbb{F}_2[t]$ でないのも
$\mathbb{F}_2[t]$ が正規環であるから。 $\alpha^2+\alpha+t=0$ より $\deg(\alpha^2+\alpha)=1$

よって これが成り立つには $\deg\alpha=1$ である必要があるが　　本では $-1=1$ なので

$f(t+1)\neq 0$, $f(t)\neq 0$ より 矛盾。 つまり $f(x)$ は K 上既約

$f(x)$ の最小分解体を L_f とおくと、 $f(x)$ の根 α について　　※ $f(x)=x^2+x+t^2$

$=x^2-x+t^2$

となり定理が使える

4.15の ことに注意

$$\alpha\in L \iff L_2\subset L_1$$

ここは L_1 が正規拡大であることより保証

$[L_1:K]=[L_2:K]$ より $\iff L_1=L_2$

$$\iff \exists c_0\in K,\ \exists c_1\in\mathbb{F}_p^\times$$

$$t^2=c_0^2-c_0+c_1t \quad \cdots ①$$

①について考えると c_0 は $\mathbb{F}_p[t]$ 上整より $c_0\in\mathbb{F}_p[t]$ である

明らかに $c_0\notin\mathbb{F}_p$ より $\deg c_0\geq 1$.

①から $2=\deg(c_0^2-c_0)$

これを満たすには $\deg c_0=1$

教科書の解答例は
主に補題4.15.2を使って
$\beta\in K(\alpha)\iff\beta=c_0+c_1\alpha$
を利用

実際 $c_0=t+1$, $c_1=1$ とすると、

$c_0^2-c_0+c_1t = t^2+1-1-t+t$

$= t^2$ となり ①を満たす。

したがって L は f の根を含む

(2) $f(x)$ が根 $\alpha\in\mathbb{F}_2[t]$ を持つとすると 明らかに $\alpha\notin\mathbb{F}_2$ より $\deg\alpha\geq1$ で

次数式より $3=2(\deg\alpha)$ これは成り立たないので $\alpha\notin\mathbb{F}_2(t)$

よって $f(x)$ は K 上既約. $f(x)$ の最小分解体を L_f とおくと、(1) と同様にして

$\exists c_0\in K$, $c_1\in\mathbb{F}_p^\times$, $t^3=c_0^2-c_0+c_1t$.

c_0 は $\mathbb{F}_p[t]$ 上整より, $c_0\in\mathbb{F}_p[t]$ 明らかに $c_0\notin\mathbb{F}_p$ より $\deg c_0\geq1$ となり

次数式から $3=2(\deg\alpha)$. 明らかに矛盾

したがって L は f の根を含まない