$\boxed{2.10.2}$ 写像 $f: M_n(k) \times M_m(k) \longrightarrow M_{nm}(k)$ を

$(a_{ij}) \in M_n(k)$, $A \in M_m(k)$ に対し

$$f((a_{ij}), A) = (a_{ij}A) \quad \text{で定める}$$

ただし $(a_{ij}A)$ は $M_{nm}(k)$ の行と列をそれぞれ n 等分に区分けしたもの.
(i, j) のブロックに対応する部分が $a_{ij}A$ であるような行列を表すとする.

$(a_{ij}), (b_{ij}) \in M_n(k)$ に対し.

$$\begin{aligned} f((a_{ij})+(b_{ij}), A) &= f((a_{ij}+b_{ij}), A) \\ &= ((a_{ij}+b_{ij})A) \\ &= (a_{ij}A + b_{ij}A) \\ &= (a_{ij}A) + (b_{ij}A) \\ &= f((a_{ij}), A) + f((b_{ij}), A) \end{aligned}$$

また, $A, B \in M_m(k)$ に対し

$$\begin{aligned} f((a_{ij}), A+B) &= ((a_{ij})(A+B)) \\ &= (a_{ij}A + a_{ij}B) \\ &= (a_{ij}A) + (a_{ij}B) \\ &= f((a_{ij}), A) + f((a_{ij}), B) \end{aligned}$$

そして, $c \in k$ に対し.

$$f(c(a_{ij}), A) = f((ca_{ij}), A) \quad \text{※ } k \text{ の可換性使用}$$

$$\begin{aligned} &= (ca_{ij}A) = c(a_{ij}A) = cf((a_{ij}), A) \\ &= a_{ij}(cA) = f((a_{ij}), cA) \end{aligned}$$

故に f は k不変な 双線形 であるので, テンソル積の普遍性により.

k代数の準同型 g で, $g: M_n(k) \otimes M_m(k) \longrightarrow M_{nm}(k)$

$g((a_{ij}) \otimes A) = (a_{ij}A)$ となるものがある.

$g((a_{ij}) \otimes A) = 0$ とすると, $0 \leq i, j \leq n$ に対して.

$$a_{ij}A = 0 \quad \text{である.}$$

ここで、行列 $M_{i,j}(c) \in M_n(k)$ を $(c \in k)$
(i,j) 成分が c で、他は全て 0 であるような行列と定義すると

$$
\begin{aligned}
(a_{ij}) \otimes A &= \sum_{i,j}^{n} M_{i,j}(a_{ij}) \otimes A \\
&= \sum_{i,j}^{n} a_{ij} M_{i,j}(1) \otimes A \\
&= \sum_{i,j}^{n} M_{i,j}(1) \otimes a_{ij} A \\
&= \sum_{i,j}^{n} M_{i,j}(1) \otimes 0 \\
&= 0
\end{aligned}
$$

となる。

よって $\ker g = \{0\}$ となり、g は単射。

また、$M_{nm}(k)$ の元 $\begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots \\ 0 & & \\ \vdots & & O \end{pmatrix}$ について

$M_n(k)$ の元 $\begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots \\ 0 & & \\ \vdots & & O \end{pmatrix}$、$M_m(k)$ の元 $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & & \\ 0 & & O \end{pmatrix}$ をとると

$g\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & O \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & O \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & O \end{pmatrix}$ となる

以下同様にして $\mathrm{Im}\, g$ が M_{nm} の k 上の基底
$\{1つの成分のみが1で、他の成分は全て0\}$ を含む。

よって g は全射。

したがって、

$$M_n(k) \otimes_k M_m(k) \cong M_{nm}(k)$$

演習1.10.2の教科書の解答例について

$T\in M_n(k)$, $S\in M_m(k)$ はそれぞれ k^n, k^m 間の準同型なので
それらを利用して $\phi(T,S)$ という $k^n\otimes k^m$ 間の準同型を1つ定めている。
ここまでで $(T,S)\longrightarrow\phi(T,S)$ ①

自然な同型写像 φ

$$\begin{tikzcd}
k^n\otimes k^m \arrow[r, "\phi(T,S)"] \arrow[d, "\varphi"'] & k^n\otimes k^m \arrow[d, "\varphi"] \\
k^{nm} \arrow[r, "\phi'"] & k^{nm}
\end{tikzcd}$$

上のような可換図式により k^{nm} 間の準同型 ϕ' が1つ定まる
要はこれは表現行列なので $\phi'\in M_{nm}(k)$ となる
ここまでで $\phi(T,S)\longrightarrow\phi'$ ②
①、②との対応を合わせて $M_n(k)\times M_m(k)\longrightarrow M_{mn}(k)$ の写像が定まり
テンソル積の普遍性より準同型 Φ を定めている
(※テンソル積の普遍性を使うためには双線形性の確認大事)
表現行列を調べるには基底の行き先を調べればいいので教科書で $e_p\otimes e_q$ について調べている。全射については T, S をうまく調整、つまり $E_{n,ij}$, $E_{m,kl}$ にすると これらは $M_{nm}(k)$ の基底を作ってくれるので、全射を示せる。
単射については $M_n(k)\otimes M_m(k)$ の元は

$$\sum_{i,j,k,l} a_{i,j,k,l}\,E_{ij}\otimes E_{kl}$$

と表せられることを利用して

後はその表現行列を調べていく感じである。