$\boxed{1.8.1}$ (1) $\mathbb{Z}[\frac{a}{b}] \subset \mathbb{Z}[\frac{1}{b}]$ は明らかである. よって逆 $\mathbb{Z}[\frac{a}{b}] \supset \mathbb{Z}[\frac{1}{b}]$ を示せばよい!

a と b は互いに素なので $1 = ax + by$ となる $x, y \in \mathbb{Z}$ が存在する。

よって $\mathbb{Z}[\frac{1}{b}] = \mathbb{Z}[\frac{ax+by}{b}] = \mathbb{Z}[\frac{a}{b}x]$

この状態では $\mathbb{Z}[\frac{a}{b}] \supset \mathbb{Z}[\frac{a}{b}x] = \mathbb{Z}[\frac{1}{b}]$. は明らかである

したがって $\mathbb{Z}[\frac{a}{b}] = \mathbb{Z}[\frac{1}{b}]$

(2) $S = \{s \in \mathbb{Z}-\{0\} \mid \exists a \in \mathbb{Z}-\{0\}, \frac{a}{s} \in A\}$ とおくと.

明らかに $0 \notin S$ で A は単位元 $1 = \frac{1}{1}$ を含むので $1 \in S$.

$s, s' \in S$ とすると $\exists a, a' \in \mathbb{Z}-\{0\};\ \frac{a}{s}, \frac{a'}{s'} \in A$

A は部分環より $\frac{a}{s} \cdot \frac{a'}{s'} = \frac{aa'}{ss'} \in A$.

よって $ss' \in S$

したがって S は $\mathbb{Z}$ の乗法的集合である。

$\mathbb{Q}$ は $\mathbb{Z}$ の商環であるので、命題1.8.7より $A \supseteq S^{-1}\mathbb{Z}$ となるので.

$A = S^{-1}\mathbb{Z}$ とみなせる.