$\boxed{4.6.1}$ (1) $N \supset M \cap N \supset \mathbb{Q}$ より $[N:\mathbb{Q}] = [N:M\cap N][M\cap N:\mathbb{Q}]$

最小多項式は x^3-2 であるから明らかに $[N:\mathbb{Q}]=3$ で 3は素数なので $[N:M\cap N]$ か $[M\cap N:\mathbb{Q}]$ のどちらかは1.

$[N:M\cap N]=1$ とすると $N = M\cap N$ となるが $\beta \in N$ より 実数でない複素数を含むが

M は明らかに実数しか含まないが $\beta \notin M\cap N$ であり矛盾.

したがって $[M\cap N:\mathbb{Q}]=1$ より $M\cap N = \mathbb{Q}$

$[L:K]=1$ を示して $L=K$ を示すのは よくやる手法なので 覚えておく.

(2)

$$\alpha^2+\beta\alpha+\beta^2 = \sqrt[3]{4}+\sqrt[3]{4}\omega+\sqrt[3]{4}\omega^2$$
$$= \sqrt[3]{4}(\omega^2+\omega+1)$$
$$= 0 \quad より$$

L の N 上の最小多項式の次数は2以下より $[L:N] \leqq 2 < 3 = [M:\mathbb{Q}]$

よって $[L:N] \neq [M:\mathbb{Q}]$

同様の議論で L の M 上の最小多項式の次数は2以下なので $[N:\mathbb{Q}] \neq [L:M]$

[これの見つけ方] 偶然見つけたが 書いておく。

x^3-2 に対して $x-(\sqrt[3]{2})^3$, $x-(\omega\sqrt[3]{2})^3$, $x-(\omega^2\sqrt[3]{2})^3$ と 3通りの見方ができる。

これを因数分解すると

$\underbrace{(x-\omega\sqrt[3]{2})}(\underbrace{x+\omega\sqrt[3]{2}x+\omega\sqrt[3]{2}x})=$

こっちに根として $\sqrt[3]{2}$ は含まれていないので

$\sqrt[3]{2}$ は根として こっちに含まれることが分かる

これを選んだ理由は 係数に $\sqrt[3]{2}\omega$ を登場させたかったから。

別に $\sqrt[3]{2}$ でも今思えば良かった。