$\boxed{4.5.2}$ 与式を $f(x)$ とおく。

※ $\mathbb{F}_2[t]$ は(命題1.11.22)一意分解域で その商体が $\mathbb{F}_2(t)$

(1) アイゼンシュタインの判定法より $f(x)$ は既約

$-3t = -3t = t$

$t^3 + 9t^2 = t^3 + t^2$ より

$g(x) = x^2 + tx + t^2(t+1)$

$g(\alpha) = 0$ となるような $\alpha \in \mathbb{F}_2[t]$ が存在するとすると $g(\alpha)=0$ より

定数項から α は t について2次以上

しかし、α が2次以上だとすると $g(\alpha)$ には4次の項が残るので矛盾.

よって $g(x)$ は既約で $\mathrm{Gal}(L/K) \cong \mathfrak{S}_3$

(2) 例1.12.10より t^2+t+1 は既約なので、アイゼンシュタインの判定法より $f(x)$ は既約

$-3(t^2+t+1) = t^2+t+1$

$(t^2+t+1)^3 + 9(t^2+t+1)^2 = (t^2+t+1)^2(t^2+t)$ より

$g(x) = x^2 + (t^2+t+1)x + (t^2+t+1)^2 t(t+1)$

$g((t+1)(t^2+t+1)) = (t+1)^2(t^2+t+1)^2 + (t^2+t+1)^2(t+1) + (t^2+t+1)^2 t(t+1)$

$= (t^2+t+1)^2(t^2+1+t+1+t^2+t)$

$= 0$

よって $g(x)$ は可約より $\mathrm{Gal}(L/K) \cong \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$

(3) $1^3+1+1 = 1$　$0^3+0+1 = 1$ より t^3+t+1 は既約. (1)と同様にして $f(x)$ は既約

$g(x) = x^2 + (t^3+t+1)x + \cancel{(t^3+t+1)^2 t(t^2+1)}$

$\mathbb{F}_2[t]$ が一意分解域なので

$g(\alpha)=0$ となるような $\alpha \in \mathbb{F}_2[t]$ が存在するとすると 定数項の次数から α は5次以上

$\mathbb{F}_2(t)$ で既約 $\Leftrightarrow$ $\mathbb{F}_2[t]$ で既約 なのを利用.

よって $\alpha = (t^3+t+1)\beta$　$\beta \in \mathbb{F}_2[t]$ とかける

このとき $0 = \beta^2 + \beta + t(t^2+1)$

さっきと同様にして 定数項の次数等から β は3次以上だが、β^2 の項に6次の項がでてきてしまい、これは0とならないので矛盾. よって $g(x)$ は既約 より

$\mathrm{Gal}(L/K) \cong \mathfrak{S}_3$

(4) (1)と同様にして $f(x)$ は既約で

$g(x) = x^2 + (t^4+t+1)x + (t^4+t+1)^2 t(t+1)(t^2+t+1)$

(3)と同様に $g(\alpha)=0$ となるような $\alpha \in \mathbb{F}_2[t]$ が存在するとすると $\alpha = (t^4+t+1)\beta$　$\beta \in \mathbb{F}_2[t]$ と表せ

$0 = \beta^2 + \beta + t(t+1)(t^2+t+1)$

実際 $\beta = t^2+t$ として取れることに気がつく.

よって $g(x)$ は可約なので $\mathrm{Gal}(L/K) \cong \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$