$\boxed{4.1.6}$

σ は $\mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$ の生成元なので

$K^G = \{ k \in K \mid \sigma(k) = k \}$ と書ける。

まず $f(x,y) \in \mathbb{C}[x,y]$ のときについて、$f(x,y) \in K^G$ となる条件を考える。

σ は準同型なので、$f(x,y)$ の項を次数に分けたときのその一項について考えればよい。

$f(x,y)$ から任意の一項として cx^iy^j $(c \in \mathbb{C}, c \neq 0)$ をとってきたとする

$$\sigma(cx^iy^j) = cx^iy^j \iff c\zeta_5^{i+3j}x^iy^j = cx^iy^j$$
$$\iff \zeta_5^{i+3j} = 1$$
$$\iff i+3j \equiv 0 \pmod 5$$

よって

$$f(x,y) \in K^G \iff f(x,y) = \sum_{i,j,\ i+3j\equiv 0 \pmod 5}^{N} c_{ij}x^iy^j \quad (c_{ij} \in \mathbb{C})$$

$\mathbb{C}(x,y)$ の元については $\dfrac{(多項式)}{(多項式)}$ で表すことができるので同様に考えて

ここの議論省いているが厳密に考えても大丈夫。

$$K^G = \left\{ \frac{\displaystyle\sum_{i,j,\ i+3j\equiv 0 \pmod 5}^{N} c_{ij}x^iy^j}{\displaystyle\sum_{i,j,\ i+3j\equiv 0 \pmod 5}^{N} c'_{ij}x^iy^j} \quad (c_{ij}, c'_{ij} \in \mathbb{C}) \right\}$$ となる。

この $f(x,y) \in \mathbb{C}[x,y]$ について $i+3j \equiv 0 \pmod 5$ より $\underbrace{i = 5k-3j}$ $(k \in \mathbb{Z})$ とおけることが分かる

ここまでくどくなくても次数だけで $i+3j \equiv 0 \pmod 5$ という条件を満たすように (感覚的なものなので証明しなくていい)

これを用いると

$f(x,y)$ の各項は

$$c_{ij}x^iy^j = c_{ij}x^{5k-3j}y^j$$
$$= c_{ij}(x^5)^k\left(\frac{y}{x^3}\right)^j$$

となり $f(x,y) \in \mathbb{C}\left(x^5, \dfrac{y}{x^3}\right)$ と分かる。

$f(x,y)$ が $\mathbb{C}(x,y)$ の元であるときも同様なので

$$K^G = \mathbb{C}\left(x^5, \frac{y}{x^3}\right)$$ となる。