$\boxed{4.1.3}$ (1) $\alpha = \sqrt{1+\sqrt{2}} \Rightarrow \alpha^2 = 1+\sqrt{2}$

$$\Rightarrow (\alpha^2-1)^2 = 2$$

$$\Rightarrow \alpha^4 - 2\alpha^2 - 1 = 0$$

$x^4 - 2x^2 - 1$ はアイゼンシュタインの判定法より $\mathbb{Q}$ 上既約であるが、

α の $\mathbb{Q}$ 上の最小多項式は $x^4 - 2x^2 - 1 = 0$

逆に $x^4 - 2x^2 - 1 = 0 \Leftrightarrow x^2 = 1 \pm \sqrt{2}$

$\Leftrightarrow x = \pm\sqrt{1 \pm \sqrt{2}}$ となるので

題意は示された。

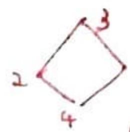
(2) $\mathbb{C}$ の複素共役を L に制限したものを $\tau \in \mathrm{Gal}(L/\mathbb{Q})$ とおくと、$\sqrt{1+\sqrt{2}}$ は実数より

$\tau(\alpha_1) = \alpha_1$, $\tau(\alpha_2) = \alpha_2$ は明らか。

また $\sqrt{1-\sqrt{2}} = \sqrt{-(\sqrt{2}-1)} = \sqrt{-1}\sqrt{\sqrt{2}-1}$

$-\sqrt{1-\sqrt{2}} = -\sqrt{-1}\sqrt{\sqrt{2}-1}$ より、$\tau(\alpha_3) = \alpha_4$, $\tau(\alpha_4) = \alpha_3$

したがって τ は (34) を引き起こす。



という四角形を不変に保つような対称操作を考えると、(34) は裏返し、(1423) は反時計回り回転、などの対応について考えると分かりやすい。

(3) $(34)(13)(24) = (1423)$ で

これをどうやって発見したかについて。

$(1423)^4 = (34)^2 = 1$ $\quad (34)(1423)(34)^{-1} = (1324) = (1423)^{-1}$

よって I. 演習 4.6.7 より D_4 から $\langle (13)(24), (34) \rangle$ への全射準同型が存在。

ここで (1423) は位数 4 で、$\langle (1423) \rangle \not\ni (34)$ であることから $|\langle (13)(24), (34) \rangle| = 8$ と分かる。したがって $D_4 \cong \langle (13)(24), (34) \rangle$

(4) $\sigma(\alpha) = -\alpha$ より $\sigma(-\alpha) = \alpha$ であるが $\sigma(-\alpha) = \beta$ より

$\alpha = \beta$ これは明らかに矛盾なので題意は示された。

(5) L は $\mathbb{Q}(\alpha)$ のガロア閉包より $L = \mathbb{Q}(\alpha, \beta)$ となる。

ここで $\alpha\beta = \sqrt{-1} \Leftrightarrow \beta = \dfrac{\sqrt{-1}}{\alpha}$ なので $\mathbb{Q}(\alpha, \beta) = \mathbb{Q}(\alpha, \sqrt{-1})$ である。

$\mathrm{Gal}(L/\mathbb{Q})$ の $\{\alpha, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4\}$ への作用によって引き起こされる置換表現 ρ について考える。ここで、$[L:\mathbb{Q}] = [L:\mathbb{Q}(\alpha)][\mathbb{Q}(\alpha):\mathbb{Q}] = 2 \times 4 = 8$ であるので

$|\mathrm{Gal}(L/\mathbb{Q})| = 8$ であることに注意しておく。

L の生成元は α, β なのでこれらの行き先を決めれば $\mathrm{Gal}(L/\mathbb{Q})$ の元も定まる。

よって $\ker\rho = \{1\}$ となり ρ は単射である。ゆえに $\mathrm{Gal}(L/\mathbb{Q}) \cong \mathrm{Im}\,\rho$

また $\rho(\tau) = (34)$ である。$\sigma(\alpha_1) = \alpha_3$ となる $\sigma \in \mathrm{Gal}(L/\mathbb{Q})$ は存在する

これについて $\rho(\sigma) = (13)(24)$ or (1324) となるが、

$\rho(\sigma) = (1324)$ のときは $\rho\tau$ を考えると $\rho(\rho\tau) = (13)(24)$ となるので

$(13)(24) \in \mathrm{Im}\,\rho$。(3) より $\mathrm{Im}\,\rho \supset D_4$ と分かるが、位数が等しいので $\mathrm{Im}\,\rho = D_4$ となる。

体、要は D_4 から $\mathrm{Im}\,\rho$ への全射準同型が存在するということ。

したがって $\mathrm{Gal}(L/\mathbb{Q}) \cong D_4$