$\boxed{4.1.5}$ (1) MはLにおけるkの分離閉包なので、M/kは分離拡大。

$\alpha \in M$ とすると、αのk上の最小多項式は、$\alpha \in L$で、L/kは正規拡大なので、

$$f(x) = (x-\alpha_1)(x-\alpha_2)\cdots(x-\alpha_n)$$

ただし、$\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n \in L$ と書ける。

ここで M/kは分離拡大なので $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \cdots, \alpha_n$ もk上分離的となり

$\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n \in M$ となる。よって M/kは正規拡大

したがって M/kはガロア拡大

(2) (1)より M/kはガロア拡大なので $\mathrm{Gal}(M/k) = \mathrm{Hom}_k^{al}(M, \bar{k})$

ここで命題3.3.27より L/Mは非純分離拡大である。

また命題3.3.30 (1) (P183) より $\mathrm{Hom}_k^{al}(M, \bar{k})$の元は $\mathrm{Hom}_k^{al}(L, \bar{k})$の元に一意的に拡張できる。そして、L/kは正規拡大より $\mathrm{Hom}_k^{al}(L, \bar{k}) = \mathrm{Aut}_k^{al} L$

ゆえに $\mathrm{Aut}_k^{al} L$の元をMに制限し、$\mathrm{Gal}(M/k)$に移す写像は全単射である。

また準同型であることも明らかなので $\mathrm{Gal}(M/k) \cong \mathrm{Aut}_k^{al} L$