$\boxed{2.10.5}$ 写像 $f : \mathbb{H} \times \mathbb{C} \to M_2(\mathbb{C})$ を

$H \in \mathbb{H}$, $c \in \mathbb{C}$ に対して $f(H, c) = Hc$ と定める.

$H_1, H_2 \in \mathbb{H}$ に対して
$$\begin{aligned} f(H_1 + H_2, c) &= (H_1 + H_2)c \\ &= H_1 c + H_2 c \\ &= f(H_1, c) + f(H_2, c) \end{aligned}$$

$c_1, c_2 \in \mathbb{C}$ に対して
$$\begin{aligned} f(H, c_1 + c_2) &= H(c_1 + c_2) \\ &= Hc_1 + Hc_2 \\ &= f(H, c_1) + f(H, c_2) \end{aligned}$$

$r \in \mathbb{R}$ に対して
$$\left.\begin{aligned} f(Hr, c) &= (Hr)c \\ &= H(rc) = f(H, rc) \\ &= rHc = rf(H, c) \end{aligned}\right\} (※)$$

よって $f$ は $\mathbb{R}$ 不変な双線形写像より

$\mathbb{R}$ 代数の準同型 $g : \mathbb{H} \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C} \to M_2(\mathbb{C})$ で

$g(H \otimes c) = Hc$ となるものがある.

ここで, $x, y, z, w \in \mathbb{R}$ を用いて $H$ は

$$H = \begin{pmatrix} x+yi & -z-wi \\ z-wi & x-yi \end{pmatrix}$$ と書ける

$g(H \otimes c) = 0$ として $\begin{pmatrix} c(x+yi) & c(-z-wi) \\ c(z-wi) & c(x-yi) \end{pmatrix} = 0$

$c = 0$ のときは. $H \otimes c = 0$ となる

$c \neq 0$ のとき. 両辺 $c$ で割って $\begin{pmatrix} x+yi & -z-wi \\ z-wi & x-yi \end{pmatrix} = 0$

$x, y, z, w \in \mathbb{R}$ より $x = y = z = w = 0$ つまり $H = 0$

よって $H \otimes c = 0$

ゆえに $\ker g = \{0\}$ より $g$ は単射

次に $g$ が全射であることを示す。

$M_n(\mathbb{C})$ を $\mathbb{R}$ 代数としてみると、基底として

$$\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix},\ \begin{pmatrix}i&0\\0&0\end{pmatrix},\ \begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix},\ \begin{pmatrix}0&i\\0&0\end{pmatrix},\ \begin{pmatrix}0&0\\1&0\end{pmatrix},\ \begin{pmatrix}0&0\\i&0\end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix},\ \begin{pmatrix}0&0\\0&i\end{pmatrix}$$ がとれるので、これらを $g$ によって作れることを示せばよい

例えば $\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}$ については

$$\begin{pmatrix}\frac{1}{2}&0\\0&\frac{1}{2}\end{pmatrix}\otimes 1 + \begin{pmatrix}\frac{1}{2}e^{\frac{\pi}{2}i}&0\\0&\frac{1}{2}e^{-\frac{\pi}{2}i}\end{pmatrix}\otimes e^{-\frac{\pi}{2}i}$$ をとると

$$g\left(\begin{pmatrix}\frac{1}{2}&0\\0&\frac{1}{2}\end{pmatrix}\otimes 1 + \begin{pmatrix}\frac{1}{2}e^{\frac{\pi}{2}i}&0\\0&\frac{1}{2}e^{-\frac{\pi}{2}i}\end{pmatrix}\otimes e^{-\frac{\pi}{2}i}\right)$$

$$= \begin{pmatrix}\frac{1}{2}&0\\0&\frac{1}{2}\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}\frac{1}{2}&0\\0&-\frac{1}{2}\end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}$$ とできる

見つけ方は、複素数の回転を意識するとわかりやすい。

他の元も同様にして $g$ によって作れるので $g$ は全射である。

よって、$\mathbb{R}$ 代数として $\mathbb{H}\otimes_{\mathbb{R}}\mathbb{C} \cong M_2(\mathbb{C})$

※ この問題について教科書は $\mathbb{C}$ 代数としているが、これは誤植だと思いスルーした。

なぜなら、仮に $\mathbb{C}$ 代数としてしまったら、テンソル積の定義より $\mathbb{R}$ は $\mathbb{C}$ 代数でなければならない。

また $\mathbb{R}$ が $\mathbb{C}$ 代数となったとしても (☆) の部分が $r\in\mathbb{C}$ となり

$H(rc) = g(H, rc)$ が示しずらい。

P4の四元数体の話によると、この $r$ は $\begin{pmatrix}r&0\\0&\bar{r}\end{pmatrix}$ という形をしていたためである。

$r\in\mathbb{R}$ のときは $r\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix} = rI$ とできるが $r\in\mathbb{C}$ ならこれができるとは限らないためである。