$\boxed{3.1.10}$ $[L:K] = 3$ より α の K 上の最小多項式 $f(x)$ は、

$$f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c \quad (a, b, c \in K)$$ とおける。

このとき $$\alpha^3 + a\alpha^2 + b\alpha + c = 0 \Leftrightarrow \alpha^3 = -a\alpha^2 - b\alpha - c$$ より

$$\begin{aligned}
\alpha^4 &= (-a\alpha^2 - b\alpha - c)\alpha \\
&= -a\alpha^3 - b\alpha^2 - c\alpha \\
&= -a(-a\alpha^2 - b\alpha - c) - b\alpha^2 - c\alpha \\
&= a^2\alpha^2 + ab\alpha + ac - b\alpha^2 - c\alpha \\
&= (a^2 - b)\alpha^2 + (ab - c)\alpha + ac
\end{aligned}$$

ここで $ab = c$ とすると $$f(x) = x^3 + ax^2 + bx + ab$$ $$= (x-a)(x^2 + 2ax - b)$$ となり

$f(x)$ の既約性に矛盾。

よって $ab - c \neq 0$ であるから

$$\alpha = \frac{1}{ab-c}\left\{\alpha^4 + (b - a^2)\alpha^2 - ac\right\} \in K(\alpha^2)$$

これにより $K(\alpha) \subset K(\alpha^2)$ が示されたが $K(\alpha^2) \subset K(\alpha)$ は明らかなので

$$K(\alpha^2) = K(\alpha)$$