$\boxed{2.8.1}$ (1) $I^m = (x, y)^m$ とおく。

このとき $I^{m+1} \subset I^m \subset \mathbb{C}[x,y]$ であるので、

$$\frac{\mathbb{C}[x,y]/I^{m+1}}{I^m/I^{m+1}} \cong \mathbb{C}[x,y]/I^m \quad \text{となる.}$$

よって $l_m = l(A/I^m)$ とおくと、

$$l\left(\frac{\mathbb{C}[x,y]/I^{m+1}}{I^m/I^{m+1}}\right) = l_m$$

$$l(\mathbb{C}[x,y]/I^{m+1}) - l(I^m/I^{m+1}) = l_m$$

$$l_{m+1} - l(I^m/I^{m+1}) = l_m \cdots (☆1)$$

特に I^m/I^{m+1} について考える

ここで $I^m = (x^i y^{m-i})$ $(i = 0, 1, \cdots, m)$ であることに注目すると、

$f + I^{m+1} \in I^m/I^{m+1}$ について、$(f \in I^m)$, $f + I^{m+1}$ と f を同一視するとする

このとき、 $f = \sum_{i=1}^{m} (f_i x^i y^{m-i})$ $f_i \in \mathbb{C}[x,y]$ とおける

f_i をまず x で割って $f_i = g_i x + a_i$ $a \in \mathbb{C}[y]$

次に $a_i \in \mathbb{C}[y]$ を y で割って $a_i = h_i y + c_i$ $c \in \mathbb{C}$

よって $f_i = g_i x + h_i y + c_i$ とおける.

このとき I^m/I^{m+1} 上では $f_i = \sum_{i=1}^{m} (g_i x^{i+1} y^{m-i} + h_i x^i y^{m+1-i} + c_i x^i y^{m-i})$

$$= \sum_{i=1}^{m} c_i x^i y^{m-i} \cdots ①$$ とかける.

また $f_i = \sum_{i=1}^{m} c_i' x^i y^{m-i}$ $(c_i' \in \mathbb{C})$ と書けたとすると

I^m/I^{m+1} 上で、 $\sum_{i=1}^{m} (c_i - c_i') x^i y^{m-i} = 0$

これは、次数より、$\mathbb{C}[x,y]$ 上で $\sum_{i=1}^{m} (c_i - c_i') x^i y^{m-i} = 0$ と同値なので

$c_i = c_i'$ となり (のちの写像を定義するために well-defined を確認)

① のような表現方法はただ1つに定まる

よって写像 $\psi: I^m/I^{m+1} \longrightarrow \mathbb{C}^{m+1}$ を

$\psi(f) = (c_0, c_1, \cdots, c_m)$ と定めることができる。

この写像が同型となることの証明は省略する

（準同型 → 定義通り調べる，単射 → $\ker\psi$，全射 → $\sum_{i=0}^{m} c_i x^i y^{m-i}$ をとってくる）

よって

$$I^m/I^{m+1} \cong \mathbb{C}^{m+1}$$

ここで $\mathbb{C}^{m+1}$ は $\mathbb{C}$ 加群としては $l(\mathbb{C}^{m+1}) = m+1$ である

よって $\boxed{※}$ より

$$l_{m+1} - l_m = m+1$$

$m \geqq 2$ のとき

$$l_m = l_1 + \sum_{i=1}^{m-1}(i+1)$$

ここで $\mathbb{C}$ 準同型 $\psi: \mathbb{C}[x,y] \longrightarrow \mathbb{C}$ 　$\psi(x) = \psi(y) = 0$ となるものを

考えることにより、準同型定理から $\mathbb{C}[x,y]/(x,y) \cong \mathbb{C}$

よって $l_1 = 1$ である。

ゆえに

$$\begin{aligned} l_m &= 1 + \frac{(m-1)m}{2} + m - 1 \\ &= m + \frac{m(m-1)}{2} \\ &= \frac{m}{2}(2 + m - 1) \\ &= \frac{m(m+1)}{2} \end{aligned}$$

これは $m=1$ のときも成り立つので ok.

(2) (1) と同様に考えると、解答を一部省略すれば

$$l_{m+1} - l_m = l(I_m / I_{m+1}) \text{ となり}$$

$I_m / I_{m+1} \cong \mathbb{C}^{{}_{m+n-1}C_{n-1}}$ となることが分かる

※ ${}_{m+n-1}C_{n-1}$ はどこからできたのかというと $0 \leqq c_1, c_2, \cdots c_n \leqq m$ について

$c_1 + c_2 + \cdots + c_n = m$ を満たす整数解

$(c_1, c_2, c_3, \cdots, c_n)$ の数である

これは しきり × $(n-1)$ コ　丸 × m コの順列の数と同等であるからである。

よって

$$l_{m+1} - l_m = {}_{m+n-1}C_{n-1} \text{ と分かるので}$$

$m \geqq 2$ のとき

$$l_m = l_1 + \sum_{i=1}^{m-1} {}_{i+n-1}C_{n-1}$$

ここで (1) と同様に考えて、

$$\mathbb{C}[x_1, x_2, \cdots x_n] \big/ (x_1, x_2, \cdots, x_n) \cong \mathbb{C}$$ なので、

$l_1 = 1$ で

$$l_m = 1 + \sum_{i=1}^{m-1} {}_{i+n-1}C_{n-1}$$

$$= \sum_{i=0}^{m-1} {}_{i+n-1}C_{n-1}. \quad \text{となる}$$

これは $m=1$ のときにも成り立つので、ok.

教科書の解答はここで終わっているが この和を Σを使わずに書けるようにしよう。

$$\sum_{i=0}^{m-1} {}_{i+n-1}C_{n-1} = \sum_{i=0}^{m-1} \frac{(i+n-1)!}{i!\,(n-1)!}$$

$$= \frac{1}{(n-1)!} \sum_{i=0}^{m-1} \frac{(i+n-1)!}{i!}$$

$$= \frac{1}{(n-1)!} \sum_{i=0}^{m-1} (i+1)(i+2)\cdots(i+n-1)$$

よって $\sum_{i=0}^{m-1} (i+1)(i+2)\cdots(i+n-1)$ を求めればよい。

$$\sum_{i=0}^{m-1} (i+1)(i+2)\cdots(i+n-1)$$

$f(k+1) - f(k)$ の差の形を作る

$$= \sum_{i=0}^{m-1} \frac{1}{n}\left\{(i+1)(i+2)\cdots(i+n-1)(i+n) - i(i+1)\cdots(i+n-1)\right\}$$

$$= \frac{1}{n} \cdot m(m+1)\cdots(m-1+n)$$

$$= \frac{(m+n-1)!}{(m-1)!\,n}$$

ゆえに

$$l_m = \frac{(m+n-1)!}{(m-1)!\,n!}$$

もう少しきれいな(?)書き方をすると
ベータ関数 B を用いて
$\{nB(m,n)\}^{-1}$ と書ける

(3) 中国剰余定理より $\mathbb{Z}/240\mathbb{Z} \cong (\mathbb{Z}/16\mathbb{Z}) \times (\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}) \times (\mathbb{Z}/5\mathbb{Z})$

よって組成列として

$$M \xrightarrow{①} (\mathbb{Z}/16\mathbb{Z}) \times (\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}) \xrightarrow{②} (\mathbb{Z}/16\mathbb{Z}) \xrightarrow{③} (2\mathbb{Z}/16\mathbb{Z})$$
$$\xrightarrow{④} (4\mathbb{Z}/16\mathbb{Z}) \times (8\mathbb{Z}/16\mathbb{Z}) \xrightarrow{⑤} (16\mathbb{Z}/16\mathbb{Z}) = \{0\}$$

がとれる。これが組成列であることについて

①, ② に関して細分がないことは自明。

③に関しては、$\mathbb{Z}/16\mathbb{Z} \supsetneq M \supsetneq 2\mathbb{Z}/16\mathbb{Z}$ が存在するとおいて

例えば $3 \in M \setminus (2\mathbb{Z}/16\mathbb{Z})$ をとれる状況では

$4 - 3 = 1 \in M$ となるので $\mathbb{Z}/16\mathbb{Z} = M$ となり矛盾。

④, ⑤ も同様にして細分できないことが分かるので

$\ell(M) = 6$ となる。

(4)
$$\frac{\mathbb{C}[x,y]}{(y-x^2,\ y-x^3)} \cong \frac{\mathbb{C}[x,y]/(y-x^2)}{(y-x^2,\ y-x^3)/(y-x^2)}$$

加群の第三同型定理

$$= \frac{\mathbb{C}[x,y]/(y-x^2)}{(y-x^3)/(y-x^2)}$$

$\mathbb{C}[x,y] \longrightarrow \mathbb{C}[x]$

yにx^2を代入

この準同型により

$\mathbb{C}[x,y]/\underset{(y-x^2)}{\ker\varphi} \cong \mathbb{C}[x]$

$$\cong \mathbb{C}[x]/(x^2 - x^3)$$
$$= \mathbb{C}[x]/x^2(x-1)$$
$$\cong \mathbb{C}[x]/(x^2) \times \mathbb{C}[x]/(x-1)$$

中国剰余定理

$$\cong \mathbb{C} \times \mathbb{C} \times \mathbb{C}$$

$\mathbb{C}[x]/(x^2) \to \mathbb{C}\times\mathbb{C}$

元を $ax+b$ とかけるので

$ax+b \to (a,b)$ を対応させる

$\mathbb{C}[x] \xrightarrow{x に 1 を代入} \mathbb{C}$

よって

$\mathbb{C}[x]/(x-1) \cong \mathbb{C}$

よって $\ell(A/I) = 3$

(5) $$\frac{\mathbb{Z}[T]}{(p^k, V_n)} \simeq \frac{\mathbb{Z}[T]/(p^k)}{(p^k, V_n)/(p^k)}$$ 加群の第三同型定理

$$\simeq \frac{(\mathbb{Z}/p^k\mathbb{Z})[T]}{(V_n)}$$ 分母・分子に命題1.7.6を適用

$$\simeq (\mathbb{Z}/p^k\mathbb{Z})^{p^n-1}$$

ここで $\mathbb{Z}/p^k\mathbb{Z}$ について、組成列

ここに細分が存在しないことは(3)と同様にして示せる。

$$\mathbb{Z}/p^k\mathbb{Z} \supsetneq p\mathbb{Z}/p^k\mathbb{Z} \supsetneq \cdots \supsetneq p^k\mathbb{Z}/p^k\mathbb{Z} = \{0\}$$ が取れる。

よって $l((\mathbb{Z}/p^k\mathbb{Z})) = k$ であるので

$$l(A/I) = k(p^n - 1)$$