OK

$\boxed{1.12.1}$ (1) 素数3に対して、アイゼンシュタインの判定法より既約である。

(2) $f_2(x) = x^3+2x^2+4x+35$ は $\mathbb{Z}[x]$ 上でモニックなので、
$f_2(x)$ が $\mathbb{Q}[x]$ で可約だとすると、$\alpha \in \mathbb{Z}$ が存在し、

$f(\alpha) = 0$ かつ $\alpha \mid 35$ を満たす。

$\alpha \mid 35$ より $\alpha = \pm1, \pm3, \pm7, \pm35$.

そこで $\alpha > 0$ のとき 明らかに $f(\alpha) > 0$

また $f(-1) = 32$ $f(-3) = 14$

$f(-7) = -238$ $f(-35) = -42875 + 2\cdot35^2 - 4\cdot35 + 35 < 0$

よって $f(\alpha) = 0$ かつ $\alpha \mid 35$ は同時に満たされないので

矛盾し、$f(x)$ は既約となる。

(3) $f_3(x) = 3x^3 - 24x^2 + 11x + 405$ に対し、

2を法として考えた $\bar{f}_3(x)$ は

$\bar{f}_3(x) = x^3 - x + 1$ となる。

$\bar{f}_3(x)$ が可約だとすると、必ず1次の因子をもつので

$\bar{f}_3(0) = 0$ または $\bar{f}_3(1) = 0$ となるが、

実際は $\bar{f}_3(0) = 1$, $\bar{f}_3(1) = 1$ となるので矛盾

よって $\bar{f}_3(x)$ は 2を法として既約。

命題 1.12.9 より、$f_3(x)$ は既約となる

(4) $f_4(x) = 2x^3 + 5x + 3$ が $\mathbb{Q}[x]$上で可約だとすると、$f_4(x)$ は原始的多項式なので、

$\mathbb{Z}[x]$ 上でも可約である (命題 1.11.34)

よって $\alpha \in \mathbb{Z}$, $f_4(\alpha) = 0$ となる α が存在する。

このとき α は3の約数なので $\alpha = \pm1, \pm3$ となる。

$\alpha > 0$ のとき $f_4(\alpha) > 0$

$\alpha = -1$ のとき $f_4(-1) = -4$

$\alpha = -3$ のとき $f_4(-3) = -66$

そのため、$f_4(\alpha) = 0$ に矛盾する。

したがって、$f_4(x)$ は既約

(5) $f_5(x) = x^4+5x+6$ が既約でないとすると

(1次式)×(3次式) or (2次式)×(2次式)に分解される。

[1] (1次式)×(3次式)のとき

(4)と同様にして $\alpha \in \mathbb{Z}$, $f_5(\alpha)=0$ となる α が存在し

$$\alpha = \pm1, \pm2, \pm3, \pm6 \quad \text{である。}$$

$\alpha > 0$ のとき　$f_5(\alpha) > 0$

$\alpha < 0$ のとき　$f_5(\alpha) = (\alpha^3+5)\alpha + 6$

$f_5(\alpha)=0$ となるためには、少なくとも

$$(\alpha^3+5)\alpha < 0$$

$\alpha<0$ より　$(\alpha^3+5) > 0$

$$\alpha = -1$$

しかし　$f_5(-1) = 1-5+6 = 2 \neq 0$

よって、矛盾。

[2] (2次式)×(2次式)のとき　モニックのはモニックの積に分解できることを押さえておこう。

$f_5(x) = (x^2+ax+b)(x^2+cx+d)$ となる

$a, b, c, d \in \mathbb{Z}$ が存在する。

(右辺) $= x^4 + (c+a)x^3 + (d+ac+b)x^2 + (ad+bc)x + bd$

よって

$$\begin{cases} a+c=0 & \cdots ① \\ b+ac+d=0 & \cdots ② \\ ad+bc=5 & \cdots ③ \\ bd=6 & \cdots ④ \end{cases}$$

①より $c=-a$ であるので

②に代入して $ad-ba=5$

$a(d-b)=5$

aは5の約数より　$a=\pm1, \pm5$

(証明は 1.12.1の解答の所に補足としてつけておく。)

$a=\pm1$ のとき　②,③より　$b+d=-1$, $b-d=\mp5$ となるので

$(a, b, d) = (1, -3, 2), (-1, 2, -3)$ となるが

どちらの場合も④を満たさない。

$a=\pm5$ のとき　②,③より　$b+d=-25$　$b-d=\mp1$ となるので

$(a, b, d) = (5, -13, -12), (-5, -12, -13)$ となるが

どちらの場合も④を満たさない。

したがって　矛盾である

[1], [2] より　$f_5(x)$ は既約である。