4.1.1 (1) $\sqrt[3]{3}$ の $\mathbb{Q}$ 上の最小多項式は アイゼンシュタインの既約判定法から x^3-3 と分かり、共役は $\sqrt[3]{3}, \omega\sqrt[3]{3}, \omega^2\sqrt[3]{3}$ （ω は1の3乗根）

よって求めるガロア閉包は $F = \mathbb{Q}(\sqrt[3]{3}, \omega\sqrt[3]{3}, \omega^2\sqrt[3]{3})$

ここで 明らかに $\mathbb{Q}(\sqrt[3]{3}, \sqrt{-3}) \supset F$ で、$\sqrt{-3} = 2\omega + 1 = 2\left(\frac{\omega^2\sqrt[3]{3}}{\omega\sqrt[3]{3}}\right) + 1$ より

$\mathbb{Q}(\sqrt[3]{3}, \sqrt{-3}) \subseteq F$ でもある。よって $F = \mathbb{Q}(\sqrt[3]{3}, \sqrt{-3})$ とも書ける

明らかに $\sqrt{-3} \notin \mathbb{Q}(\sqrt[3]{3})$ だが $(\sqrt{-3})^2 = -3 \in \mathbb{Q}$ より $[\mathbb{Q}(\sqrt{-3}, \sqrt[3]{3}) : \mathbb{Q}(\sqrt[3]{3})] = 2$

また $[\mathbb{Q}(\sqrt[3]{3}) : \mathbb{Q}] = 3$ であるので

$$\mathrm{Gal}(F/K) = [F:K] = [F:\mathbb{Q}(\sqrt[3]{3})][\mathbb{Q}(\sqrt[3]{3}):\mathbb{Q}] = 6$$

よって $|\mathrm{Gal}(F/K)| = |\mathfrak{S}_3| = 6$ …①

また、$\alpha_1 = \sqrt[3]{3}$, $\alpha_2 = \omega\sqrt[3]{3}$, $\alpha_3 = \omega^2\sqrt[3]{3}$ とすると

$\mathrm{Gal}(F/K)$ は根をその共役に移すので、その $\{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3\}$ への作用を考えられる。

この作用によって定まる置換表現 $\rho : \mathrm{Gal}(F/K) \longrightarrow \mathfrak{S}_3$ について考える。

ρ は置換表現なので、準同型…②，$\mathrm{Ker}\,\rho \ni \sigma$ とすると

$\sigma(\alpha_i) = \alpha_i$ $(i = 1, 2, 3)$ となる。

F は $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ によって生成されているので、$\mathrm{Gal}(F/K)$ はその生成元の値によって定まるから $\sigma = 1$

故に $\mathrm{Ker}\,\rho = \{1\}$ なので、ρ は単射…③

①、②、③より $\mathrm{Gal}(F/\mathbb{Q}) \cong \mathfrak{S}_3$

(2) $\sqrt[4]{2}$ の $\mathbb{Q}$ 上の最小多項式は アイゼンシュタインの既約判定法から x^4-2

よってその共役は $\pm\sqrt[4]{2}$, $\pm\sqrt{-1}\sqrt[4]{2}$

ゆえに求めるガロア閉包は $F = \mathbb{Q}(\pm\sqrt[4]{2}, \pm\sqrt{-1}\sqrt[4]{2})$

ここで 明らかに $F \subset \mathbb{Q}(\sqrt[4]{2}, \sqrt{-1})$ で $\sqrt{-1}\sqrt[4]{2} / \sqrt[4]{2} = \sqrt{-1}$ より

$F \supset \mathbb{Q}(\sqrt[4]{2}, \sqrt{-1})$ でもあるから $F = \mathbb{Q}(\sqrt[4]{2}, \sqrt{-1})$ とも書ける

明らかに $\sqrt{-1} \notin \mathbb{Q}(\sqrt[4]{2})$ だが $(\sqrt{-1})^2 = -1 \in \mathbb{Q}$ より $[F : \mathbb{Q}(\sqrt[4]{2})] = 2$.

また $[\mathbb{Q}(\sqrt[4]{2}) : \mathbb{Q}] = 4$ であるので

$$|\mathrm{Gal}(F/K)| = [F:K] = [F:\mathbb{Q}(\sqrt[4]{2})][\mathbb{Q}(\sqrt[4]{2}):\mathbb{Q}] = 8$$

ここで、$\alpha_1 = \sqrt[4]{2}$, $\alpha_2 = -\sqrt[4]{2}$, $\alpha_3 = \sqrt{-1}\sqrt[4]{2}$, $\alpha_4 = -\sqrt{-1}\sqrt[4]{2}$ とおくと

$\mathrm{Gal}(F/K)$ は根をその共役に移すので、$\{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4\}$ への作用を考えられる。

この作用によって定まる置換表現 $\rho : \mathrm{Gal}(F/K) \to \mathfrak{S}_4$ について考える。

F の生成元は α_1, α_3 なので α_1, α_3 の行き先が決まれば $\sigma \in \mathrm{Gal}(F/K)$ が一つに定まる。

どの元の行き先が決まれば、どの元の行き先も決まるかしっかり把握しておこう。

$\mathrm{Gal}(F/K)$ は根をその共役に移すので、その元の行き先としてはこの時点で16個に絞れるが、例えば $\alpha_1 \to \alpha_2$, $\alpha_3 \to \alpha_3$ と移すような元は明らかに F の同型とならないので除外できる。このようにして絞り込んでいくと 8個に早く絞れ $|\mathrm{Gal}(F/K)| = 8$ より、

$\mathbb{Q}(\sqrt[4]{2}, \sqrt{-1}) \to \mathbb{Q}(\sqrt{-1})$ となってしまうから

これらの元で 全ての元を 網羅 している ことが分かる。

その元について　α_1の行き先がα_i，α_2の行き先がα_j　$(i, j = 1, 2, 3, 4)$

になるとき，それをσ_{ij}と表すことにすると

$$\mathrm{Gal}(F/K) = \{\sigma_{13}, \sigma_{14}, \sigma_{23}, \sigma_{24}, \sigma_{31}, \sigma_{32}, \sigma_{41}, \sigma_{42}\}$$ と書ける。

これらに対して

$$\rho(\sigma_{13}) = 1 \qquad \rho(\sigma_{14}) = (34)$$

$$\rho(\sigma_{23}) = (12) \qquad \rho(\sigma_{24}) = (12)(34)$$

$$\rho(\sigma_{31}) = (13)(24) \qquad \rho(\sigma_{32}) = (1324)$$

$$\rho(\sigma_{41}) = (1423) \qquad \rho(\sigma_{42}) = (14)(23)$$ となり，

$\mathrm{Ker}\,\rho = \{id\}$ となり　ρは単射

$(12)(1423) = (14)(23)$　　$(1423)(12) = (13)(24)$　より

$\mathrm{Im}\,\rho$は非可換群で，位数4の元が2つのみであることに注目すると

Iの演習4.7.2より　　$\mathrm{Im}\,\rho \cong D_4$であることが分かる。

4元数群は位数4の元にi, j, kがあるので少なくとも3以上

したがって　$\mathrm{Gal}(F/K) \cong D_4$．

iは$x^2 - 1 = 0$の解なので，$\sigma \in \mathrm{Gal}(F/K)$は

$\sigma(i) = \pm i$であることが分かる。（拡大体の存在性をうたう命題より保証済）

教科書の解説はこうで考えているのである。（こうで考えた方が楽）

（因みに，$\pm i$で考えればよい）

$\alpha_1 \mapsto 3$　　$1 \mapsto 3$