3.2.2 文字が分かりやすいように $k=\mathbb{C}(t)$ として考える。

$[\overline{k}:k]=n\ (\in\mathbb{N})$ と仮定すると、

$\sqrt[n+1]{t}\in\overline{k}$ について考える。 明らかに $(\sqrt[n+1]{t})^{n+1}-t=0$ である。

$\mathbb{C}$ は体であるので、$\mathbb{C}[t]$ はユークリッド環。そして $\mathbb{C}(t)$ は $\mathbb{C}[t]$ の商体である。

したがって アイゼンシュタインの判定法から $x^{n+1}-t\in k[x]$ は $k$ 上の最小多項式

なって $[k(\sqrt[n+1]{t}):k]=n+1$ であるが

$[\overline{k}:k]=n$ より $n=[\overline{k}:k(\sqrt[n+1]{t})](n+1)\geq n+1$ が成り立ち矛盾。

したがって $[\overline{k}:k(\sqrt[n+1]{t})]=\infty$