$\boxed{3.1.4}$ 命題1.3.14より Aに対し、$\phi(x_1) = ax_1 + cx_2$, $\phi(x_2) = bx_1 + dx_2$

となるような K準同型 $\phi : L \to L$ が存在する.

Lは体なので、ϕは単射である.

よって ϕが K同型と示すためには、ϕが全射であることを言えばよい.

$(\phi(x_1) \ \ \phi(x_2)) = (x_1 \ \ x_2) A$ である.

$A \in GL_2(K)$ より $A^{-1} \in GL_2(K)$ が存在して $AA^{-1} = I_2$.

よって $A^{-1} = \begin{pmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{pmatrix}$ $(a', b', c', d' \in K)$ とおくと.

$$(x_1 \ \ x_2) = (\phi(x_1) \ \ \phi(x_2)) A^{-1}$$

$$= (a'\phi(x_1) + c'\phi(x_2) \ \ b'\phi(x_1) + d'\phi(x_2))$$

ゆえに $x_1 = a'\phi(x_1) + c'\phi(x_2)$ $\quad x_2 = b'\phi(x_1) + d'\phi(x_2)$

$= \phi(a'x_1 + c'x_2)$ $\quad = \phi(b'x_1 + d'x_2)$

$L = K(x_1, x_2)$ より、ϕは全射となる.

したがって $\phi \in \mathrm{Aut}_K^{al} L$ となり 題意は示された.