4.11.1 $\alpha \in \mathbb{Z}[\sqrt{-1}]$ より $\alpha = x+iy$ $(x, y \in \mathbb{Z})$ とおける。

$\{\alpha, \bar{\alpha}\}$ が $\mathbb{Z}$ 加群としての基底となるとする。

このとき 任意の $x'+iy'$ $(x', y' \in \mathbb{Z})$ に対して、ある $c_1, c_2 \in \mathbb{Z}$ が存在し、

$x'+iy' = c_1\alpha + c_2\bar{\alpha}$ が成り立つ。

$$(右辺) = c_1x + c_1yi + c_2x - c_2yi$$
$$= (c_1+c_2)x + (c_1-c_2)yi$$

実・虚を比較して $\begin{cases} x' = (c_1+c_2)x & \cdots ① \\ y' = (c_1-c_2)y & \cdots ② \end{cases}$

$|x|>1$ または $|y|>1$ とすると、①、②のどちらかは $|x|, |y|$ の倍数となり、これは
任意の x', y' に対して ①、②が成り立つことに矛盾。

よって $|x|<1$ かつ $|y|<1$

さらに $x=0$ または $y=0$ とすると、例えば $x=0$ のとき $\alpha = iy$, $\bar{\alpha} = -iy$ となり
これは線形独立性を満たさないので矛盾。よって $x \neq 0$ かつ $y \neq 0$。

ここまでの議論より $(x, y) = (1, 1), (1, -1), (-1, 1), (-1, -1)$

このうち $(x, y) = (1, 1), (1, -1)$、$(x, y) = (-1, 1), (-1, -1)$ は
基底としては同じことを表しているので $(x, y) = (1, 1), (1, -1)$ としてもよい。

$(x, y) = (1, 1)$ のとき ①、②を解くと $c_1 = \frac{x'+y'}{2}$, $c_2 = \frac{x'-y'}{2}$

x', y' のどちらか一方のみが奇数のとき これを満たす $c_1, c_2 \in \mathbb{Z}$ は存在しない

$(x, y) = (1, -1)$ のとき $c_1 = \frac{x'-y'}{2}$, $c_2 = \frac{x'+y'}{2}$

先ほどと同様にして矛盾

したがって、$\{\alpha, \bar{\alpha}\}$ は基底にはならない。

〈教科書 P242 の注意について〉

$K = \mathbb{Q}$, $L = \mathbb{Q}(i)$ としたのが今回の問題である。実際 $\mathbb{Q}(i)/\mathbb{Q}$ はガロア拡大である。

そして $O_{\mathbb{Q}}$ について、$x-a$ $(a \in \mathbb{Z})$ を考えることにより $O_{\mathbb{Q}} \supset \mathbb{Z}$

$\mathbb{Z}$ は正規環なので $O_{\mathbb{Q}} \subset \mathbb{Z}$、よって $O_{\mathbb{Q}} = \mathbb{Z}$

$O_{\mathbb{Q}(i)}$ について $a+bi$ $(a, b \in \mathbb{Z})$ に対して $x^2-2ax+a^2+b^2$ を考えることにより、

$O_{\mathbb{Q}(i)} \supset \mathbb{Z}[i]$、$\mathbb{Z}[i]$ はユークリッド環より、正規環なので $O_{\mathbb{Q}(i)} \subset \mathbb{Z}[i]$

したがって $O_{\mathbb{Q}(i)} = \mathbb{Z}[i]$

つまり、今 $\mathbb{Z}[i]$ の $\mathbb{Z}$ 上の正規底となるものがあるのかということを考えている。

この問題の答えから分かるように「存在しない」となるのである。