

3.1.15 (1) 1の3乗根  $\varepsilon, \omega, \varepsilon^2$   $\sqrt[3]{3}$  の最小多項式は  $x^3 - 3 = 0$  である。

3の根は  $\sqrt[3]{3}, \omega\sqrt[3]{3}, \omega^2\sqrt[3]{3}$  である。

命題 3.1.32 (1)  $\mathbb{Q}$  上の同型  $\phi_1: \mathbb{Q}(\sqrt[3]{3}) \rightarrow \mathbb{Q}(\omega\sqrt[3]{3})$

$\phi_2: \mathbb{Q}(\sqrt[3]{3}) \rightarrow \mathbb{Q}(\omega^2\sqrt[3]{3})$  であり、 $\phi_1(\sqrt[3]{3}) = \omega\sqrt[3]{3}, \phi_2(\sqrt[3]{3}) = \omega^2\sqrt[3]{3}$

である。

このとき  $\phi_1(\alpha) = \omega\sqrt[3]{3} - \omega^2\sqrt[3]{9}, \phi_2(\alpha) = \omega^2\sqrt[3]{3} - \omega\sqrt[3]{9}$  である。

$f(x) = (x - \alpha)(x - \phi_1(\alpha))(x - \phi_2(\alpha))$  である。  $f(\alpha) = 0$  である。

$$\begin{aligned} \alpha + \phi_1(\alpha) + \phi_2(\alpha) &= \sqrt[3]{3} - \sqrt[3]{9} + \omega\sqrt[3]{3} - \omega^2\sqrt[3]{9} + \omega^2\sqrt[3]{3} - \omega\sqrt[3]{9} \\ &= (1 + \omega + \omega^2)\sqrt[3]{3} - (1 + \omega + \omega^2)\sqrt[3]{9} \\ &= 0 \quad \text{よって } 1 + \omega + \omega^2 = 0 \end{aligned}$$

また、 $\alpha\phi_1(\alpha) + \alpha\phi_2(\alpha) + \phi_1(\alpha)\phi_2(\alpha)$

$$= \alpha(\phi_1(\alpha) + \phi_2(\alpha)) + (\omega\sqrt[3]{3} - \omega^2\sqrt[3]{9})(\omega^2\sqrt[3]{3} - \omega\sqrt[3]{9})$$

$$= -\alpha^2 + \sqrt[3]{9} - 3\omega^2 - 3\omega + 3\sqrt[3]{3}$$

$$= \sqrt[3]{9} + 3\sqrt[3]{3} + 3 - (\sqrt[3]{9} - 2 \cdot 3 + 3\sqrt[3]{3})$$

$$= 3 + 6$$

$$= 9$$

$$\alpha\phi_1(\alpha)\phi_2(\alpha)$$

$$= (\sqrt[3]{3} - \sqrt[3]{9})(\sqrt[3]{9} + 3 + 3\sqrt[3]{3}\omega)$$

$$= 3 - 9$$

$$= -6$$

よって

$$f(x) = x^3 + 9x + 6$$

$$\mathbb{Q}(\sqrt[3]{3}) \supset \mathbb{Q}(\alpha) \text{ である。}$$

$$[\mathbb{Q}(\sqrt[3]{3}) : \mathbb{Q}] = 3 \text{ である。}$$

$\mathbb{Q}(\alpha)$  は  $\mathbb{Q}(\sqrt[3]{3})/\mathbb{Q}$  の中間体である。

$[\mathbb{Q}(\alpha) : \mathbb{Q}]$  は 3 の約数である。

$[\mathbb{Q}(\alpha) : \mathbb{Q}] = 1$  である。  $\mathbb{Q}(\alpha) = \mathbb{Q}$  である。  $\alpha \notin \mathbb{Q}$  である。

よって

$$[\mathbb{Q}(\alpha) : \mathbb{Q}] = 3$$

よって

$$\deg f = 3 \text{ である。}$$

$$f(x) = x^3 + 9x + 6 \text{ は } \alpha \text{ の最小多項式である。}$$

(2) (1) である。

$$\alpha^3 + 9\alpha + 6 = 0 \text{ である。}$$

$$\alpha^3 + 9 = -6$$

$$\alpha = -\frac{1}{\alpha} (\alpha^3 + 9)$$

$$= -\frac{1}{\alpha} (\sqrt[3]{9} - 6 + 3\sqrt[3]{3} + 9)$$

$$= -\left(\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\alpha}\sqrt[3]{3} + \frac{1}{\alpha}\sqrt[3]{9}\right)$$

教科書の解答を参照せよ。