∵ $\boxed{4.16.1}$　$\mathrm{ch}\,\mathbb{Q}=0$ より 与式はすべて分離的多項式である。

(1)　例1.12.10より　$x^4+x^3+1$ は $\mathbb{F}_2[x]$ 上既約。

よって 与式は $\mathbb{Q}[x]$ 上既約である。

ここで
$$b_1 = -a_2 = -2$$
$$b_2 = a_1a_3 - 4a_4 = 1\cdot(-4) - 4\cdot 3 = -16$$
$$b_3 = -a_4(a_1^2-4a_2) - a_3^2 = -3(1^2-4\cdot 2) - (-4)^2 = 5$$

よって　$g(y) = y^3-2y^2-16y+5$

~~アイゼンシュタインの判定法よりこれは既約~~　満たしていないのでX.

また
$$c_1 = b_1b_2 - 3b_3 = (-2)(-16) - 15 = 17$$
$$c_2 = b_2^3 + 9b_3^2 - 6b_1b_2b_3 + b_1^3b_3$$
$$= -16^3 + 9\cdot 25 - 6\cdot 2\cdot 16\cdot 5 - 8\cdot 5$$
$$= -4096 + 225 - 60\cdot 16 - 40$$
$$= -4096 + 225 - 960 - 40$$
$$= -5096 + 225$$
$$= -4871$$

$g(y) = (y-5)(y^2+3y-1)$ で

2次因子の解 $\dfrac{-3\pm\sqrt{13}}{2}$ で

$$D(h) = c_1^2 - 4c_2$$
$$= 289 + 4\cdot 4871$$
$$= 289 + 19484$$
$$= 19773$$
$$= 3^2\cdot 13^3$$

$9\,|\,19773$　$169\,|\,2197$　$13$

この方程式は

$\omega^2+\omega-3=0$

$\omega^2-5\omega+13=0$

これらは $\mathbb{Q}(\sqrt{13})$ に解をもつので

よって $D(h)$ は平方数でないので, $h(x)$ は既約, つまり　$\mathrm{Gal}(L/\mathbb{Q}) \cong \mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$

(2).　~~アイゼンシュタインの判定法より　与式は既約~~

$b_1 = 5$,　$b_2 = -4\cdot 6 = -24$,　$b_3 = -6\cdot(-4)\cdot(-5) = -120$

よって　$g(y) = y^3+5y^2-24y-120$.

$g(-5) = 0$ なので　$g(y)$ は可約　　与式は $(x^2-2)(x^2-3)$

$=(x-\sqrt{2})(x+\sqrt{2})(x-\sqrt{3})(x+\sqrt{3})$

また
$$c_1 = -120+360 = 240,$$
$$c_2 = -24^3 + 9\cdot 120^2 - 6\cdot 5\cdot 24\cdot 120 - 5^3\cdot 120$$
$$= -24^3 + 120(1080 - 720 - 125)$$
$$= -24^3 + 120\cdot 235$$
$$= 24\cdot 599.$$

$=24$ 例

$L=\mathbb{Q}(\sqrt{2},\sqrt{3})$

よって $\mathrm{Gal}(L/\mathbb{Q})$

$\cong (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$

$D(h) = c_1^2 - 4c_2$

$= 240^2 + 4\cdot 24\cdot 599$

$= 24(24\cdot 10^2 + \underbrace{4\cdot 599}_{})$ ← 24の倍数でない。

よって　$h(z)$ は既約

$g(y) = (y+5)(y^2-24)$

$y=-5$ 以外の解は　$y = \pm 2\sqrt{6}$　よって $\mathbb{Q}(\tau_1) = \mathbb{Q}(\sqrt{6})$

また　$d_1 = 0$,　$d_2 = -24$

$a_1^2 + 4d_1 = 0$,　$c_2^2 - 4a_4 = 25 - 24 = 1$

これらは　$\langle(\mathbb{Q}^\times)^2, 6\rangle \cup \{0\}$ に属する。

$\mathrm{Gal}(L/\mathbb{Q}) \cong \cancel{\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}}\ \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$

(3) 以降 計算はエクセルに頼る。与式は $f(1)\neq 0$, $f(-1)\neq 0$ より既約

~~与式はアイゼンシュタインの既約判定法より既約~~

$g(y) = y^3+10y^2-4y-40 = (y+10)(y^2-4) = (y+10)(y-2)(y+2)$

よって　$\mathrm{Gal}(L/\mathbb{Q}) \cong (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})\times(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$

4) 554496
4) 138624
4) 34656
2) 8614
4307

(4) 与式はアイゼンシュタインの判定法より既約。OK

$g(y) = y^3+10y^2-24y-240 = (y+10)(y^2-24)$

また　$h(z) = z^2+480z-81024$ で　$D(h) = 554496 = 2\cdot 4^3\cdot \underline{4307}$ ← 2の倍数でない

よって　$h(z)$ は既約である

$g(y)=0$ の $y=-10$ 以外の解は $y=\pm 2\sqrt{6}$,　よって　$\mathbb{Q}(\tau_1) = \mathbb{Q}(\sqrt{6})$

また　$d_1 = 0$,　$d_2 = 24$

$a_1^2 + 4d_1 = 0$,　$c_2^2 - 4a_4 = 100 - 4\cdot 6 = 76$

$c_2^2 - 4a_4$ は $\langle(\mathbb{Q}^\times)^2, 6\rangle$ に属さないので　$\mathrm{Gal}(L/\mathbb{Q}) \cong D_4$

(5) $f(x) = x^4+8x+12$ とおくと　$f'(x) = 4x^3+8 = 4(x^3+2)$ で

$f'(x)=0$ となる $x = -\sqrt[3]{2}$,　$f(-\sqrt[3]{2}) = -6\sqrt[3]{2}+12 > 0$ より

$f(x)$ は $\mathbb{Q}$ 上に解を持たない。よって $f(x)$ が可約だとしたら それは2次式の積

$f(x) = (x^2+ax+b)(x^2+cx+d)$　$(a,b,c,d\in\mathbb{Z})$ とかける

よって
$$\begin{cases} a+c=0 & ① \\ ac+b+d=0 & ② \\ ad+bc=8 & ③ \\ bd=12 & ④ \end{cases}$$

①より　$a=-c$ で　②に代入して

$b+d = c^2$

よって　$b+d$ は平方数となるが　④で $(b,d)$ を場合分けすると 矛盾することが分かる。よって 与式は既約。

$g(y) = y^3 - 48y - 64$ 　$n^3-48n-64=0$ を満たす整数 $n$ は存在しないので既約。

~~アイゼンシュタインの判定法より既約。~~

また $h(z) = z^2+192z-73728$. $D(h) = 331776 = 4^6 \cdot 3^2$ 　$(n^3-48n)=64$ として。

$D(h)$ は平方数なので $h$ は可約。よって $\mathrm{Gal}(L/\mathbb{Q}) \cong A_4$

$n=2k$ とおいていけば示せる。

(6). 与式はアイゼンシュタインの判定法より既約 OK

$g(y) = y^3-4y^2-8y-4$

$g(2) = 8-16-16-4 \neq 0$

$g(-2) = -8-16+16-4 \neq 0$

$g(4) = 64-64-32-4 \neq 0$

$g(-4) = -64-64+32-4 \neq 0$

$g(1), g(-1)$ も $\neq 0$

よって $g(y)$ は $\mathbb{Q}$ 上既約.

また $h(z) = z^2+44z+656$ で. $D(h) = -688 < 0$ より

$h(z)$ は既約

よって $\mathrm{Gal}(L/k) \cong \mathfrak{S}_4$