$\boxed{3.2.1}$ $[\overline{\mathbb{Q}}:\mathbb{Q}] = n\ (\in \mathbb{N})$ と仮定する

このとき $\sqrt[n+1]{2} \in \overline{\mathbb{Q}}$ について考える. 明かに $(\sqrt[n+1]{2})^{n+1} - 2 = 0$ で,

アイゼンシュタインの判定法より $\sqrt[n+1]{2}$ の $\mathbb{Q}$上の最小多項式は $x^{n+1}-2$ であることが分かる

よって $[\mathbb{Q}(\sqrt[n+1]{2}):\mathbb{Q}] = n+1$ であるが,

$[\overline{\mathbb{Q}}:\mathbb{Q}] = n$ より $n = [\overline{\mathbb{Q}}:\mathbb{Q}(\sqrt[n+1]{2})](n+1) \geq n+1$ が成り立ち矛盾

したがって $[\overline{\mathbb{Q}}:\mathbb{Q}] = \infty$