$\boxed{3.3.5}$ αのk上の最小多項式を$f(x) \in k[x]$，$\deg f(x) = n$とおく$(n \geqq 1)$

αは分離的なので、互いに異なる$\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_n \in \bar{k}$を用いて

$$f(x) = (x-\beta_1)(x-\beta_2)\cdot\cdots\cdot(x-\beta_n)$$ とかける

$f(x)$はαの最小多項式より$\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_n$は$\alpha$の共役である ここで$\alpha = \beta_1$としても一般性は失われない。

よって命題3.1.32より $\phi_i : k(\alpha) \to k(\beta_i)$，$\phi_i(\alpha) = \beta_i$となる

k上の同型ϕ_iが存在する。

そして定理3.2.3よりϕ_iの拡張でk上の同型となる$\tilde{\phi}_i : \bar{k} \to \bar{k}$

この定義域を$\bar{k}$からLに縮小したものをϕ_i'とすれば

$\phi_i'(\alpha) = \beta$，$\phi' \in \mathrm{Hom}_k^{al}(L, \bar{k})$を満たす。

よって $\{\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_n\} \subset \{\phi(\alpha) \mid \phi \in \mathrm{Hom}_k^{al}(L, \bar{k})\}$となる。

逆に3.1.31より $\phi \in \mathrm{Hom}_k^{al}(L, \bar{k})$に対して$\phi(\alpha)$は$\alpha = \beta_1$の共役となる。

故に$\{\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_n\} \supset \{\phi(\alpha) \mid \phi \in \mathrm{Hom}_k^{al}(L, \bar{k})\}$となり

$\beta_i = \alpha_i$とおけば $\{\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n\} = \{\phi(\alpha) \mid \phi \in \mathrm{Hom}_k^{al}(L, \bar{k})\}$となり

$$f(x) = (x-\alpha_1)(x-\alpha_2)\cdot\cdots\cdot(x-\alpha_n)$$ とかける。

したがって題意は示された。

命題3.3.15を使えばここの証明がもっと楽だったかも。