$\boxed{3.1.16}$ (1) $\deg f(x)=3$ より. $f(x)$ が既約 $\Longleftrightarrow$ $f(\alpha)=0$ となる $\alpha\in\mathbb{Q}$ が存在しない.

$f(\alpha)=0$ であると $\alpha=\pm1$ である (命題 1.12.4)

$f(1)=1-1+1=1\neq0$ $\quad f(-1)=-1+1+1=1$

よって. $f(\alpha)=0$ となる $\alpha\in\mathbb{Q}$ は存在しないので $f(x)$ は $\mathbb{Q}$上既約

(2). $x\beta^3+y\beta^2+z\beta+w=0$ $\quad(x,y,z,w\in\mathbb{Q})$ とする

これを満たす (x,y,z,w) で零ベクトルとならないものを見つければよい。

計算して $\beta^2=4\alpha^2+3\alpha-1$, $\beta^3=10\alpha^2+5\alpha-8$

(問題 3.1.14 と同様にして計算)

こう書くと「見つかればいいな」くらいの感覚だが、実際には $\{1,\beta,\beta^2,\beta^3\}$ は $[\mathbb{Q}(\alpha):\mathbb{Q}]=3$ より必ず線形従属となるので、存在することは大丈夫。よって必ず見つかる。

$x\beta^3+y\beta^2+z\beta+w=0$

$x(17\alpha^2+18\alpha+12)+y(4\alpha^2+5\alpha+3)+z(\alpha^2+\alpha+1)+w=0$

$\{\alpha^2,\alpha,1\}$ は $\mathbb{Q}$ 上の基底より

$$\begin{pmatrix}10&4&1&0\\5&3&1&0\\-8&-1&1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\\z\\w\end{pmatrix}=0$$

これを解くと $x=t$, $y=-5t$, $z=10t$, $w=-7t$ $\quad(t\in\mathbb{Q})$

よって例えば $t=1$ とすれば $\beta^3-5\beta^2+10\beta-7=0$ となる.

最後に $g(x)=x^3-5x^2+10x-7$ について調べる.

$[\mathbb{Q}(\alpha):\mathbb{Q}]=3$ より $[\mathbb{Q}(\beta):\mathbb{Q}]=1,3$ である.

しかし. $[\mathbb{Q}(\beta):\mathbb{Q}]=1$ とすると, $\exists q\in\mathbb{Q}$, $\beta=q$

$\Longleftrightarrow$ $\alpha^2+\alpha+1=q$

$\Longleftrightarrow$ $\alpha^2+\alpha+(1-q)=0$

これは αの最小多項式が x^3-x+1 であることと矛盾する.

よって $[\mathbb{Q}(\beta):\mathbb{Q}]=3$ であり $\deg g(x)=3$ より

$x^3-5x^2+10x-7$ が求める最小多項式となる.

(3) (2) より $\beta^3-5\beta^2+10\beta-7=0$ なので

明らかに $\beta\neq0$ より $\beta^2-5\beta+10-7\beta^{-1}=0$

$\beta^{-1}=\frac{1}{7}(\beta^2-5\beta+10)$

$=\frac{1}{7}(4\alpha^2+3\alpha-1-5\alpha^2-5\alpha-5+10)$

$=\frac{1}{7}(-\alpha^2-2\alpha+4)$