$\boxed{3.7.1}$ (1) $\phi \in \mathrm{Hom}^{al}_{\mathbb{Q}}(L, \overline{\mathbb{Q}})$ とすると、ϕ は $\sqrt{2}, \sqrt{5}$ をそれぞれの共役 $\pm\sqrt{2}, \pm\sqrt{5}$ に移し、

L の生成元は $\sqrt{2}, \sqrt{5}$ より $|\mathrm{Hom}^{al}_{\mathbb{Q}}(L, \overline{\mathbb{Q}})| \leq 4$

また $[L : \mathbb{Q}] = [L : \mathbb{Q}(\sqrt{2})][\mathbb{Q}(\sqrt{2}) : \mathbb{Q}]$

$= 2 \times 2$

$= 4$ ※ $[L : \mathbb{Q}(\sqrt{2})] = 2$ の証明略. 例題 3.1.34 と同様にG.

$L/\mathbb{Q}$ は分離拡大であるので、$|\mathrm{Hom}^{al}_{\mathbb{Q}}(L, \overline{\mathbb{Q}})| = [L : \mathbb{Q}] = 4$

よって $\sigma, \tau \in \mathrm{Hom}^{al}_{\mathbb{Q}}(L, \overline{\mathbb{Q}})$ で

$\sigma(\sqrt{2}) = -\sqrt{2},\ \sigma(\sqrt{5}) = \sqrt{5}$, $\tau(\sqrt{2}) = \sqrt{2},\ \tau = -\sqrt{5}$ となるものがある.

これらを用いると、$\mathrm{Hom}^{al}_{\mathbb{Q}}(L, \overline{\mathbb{Q}}) = \{id, \sigma, \tau, \sigma\tau\}$ とかける.

ここで $\sqrt{2} + \sqrt{5} \in L$ を考えると

$id(\sqrt{2} + \sqrt{5}) = \sqrt{2} + \sqrt{5}$, $\sigma(\sqrt{2} + \sqrt{5}) = -\sqrt{2} + \sqrt{5}$

$\tau(\sqrt{2} + \sqrt{5}) = \sqrt{2} - \sqrt{5}$ $\sigma\tau(\sqrt{2} + \sqrt{5}) = -\sqrt{2} - \sqrt{5}$ となるので.

定理 3.7.1 より $L = \mathbb{Q}(\sqrt{2} + \sqrt{5})$ となる.

(2) $\phi \in \mathrm{Hom}^{al}_{\mathbb{Q}}(L, \overline{\mathbb{Q}})$ とおくと、ϕ は $\sqrt{2}$ を $\pm\sqrt{2}$, $\sqrt[3]{3}$ を $\sqrt[3]{3}, \omega\sqrt[3]{3}, \omega^2\sqrt[3]{3}$ (ω は1の複素3乗根)

に移す。L の生成元は $\sqrt{2}, \sqrt[3]{3}$ より $|\mathrm{Hom}^{al}_{\mathbb{Q}}(L, \overline{\mathbb{Q}})| \leq 6$.

そして、$L \supset \mathbb{Q}(\sqrt{2}) \supset \mathbb{Q}$, $L \supset \mathbb{Q}(\sqrt[3]{3}) \supset \mathbb{Q}$ で $[\mathbb{Q}(\sqrt{2}) : \mathbb{Q}] = 2$, $[\mathbb{Q}(\sqrt[3]{3}) : \mathbb{Q}] = 3$ より

$[L : \mathbb{Q}]$ は6の倍数.

$L/\mathbb{Q}$ は分離拡大より $|\mathrm{Hom}^{al}_{\mathbb{Q}}(L, \overline{\mathbb{Q}})| = [L : \mathbb{Q}] \geq 6$

構造に注目して、証明すると楽だから、このようにした。

よって $|\mathrm{Hom}^{al}_{\mathbb{Q}}(L, \overline{\mathbb{Q}})| = 6$

特に $\sigma, \tau \in \mathrm{Hom}^{al}_{\mathbb{Q}}(L, \overline{\mathbb{Q}})$ で

$\sigma(\sqrt{2}) = -\sqrt{2},\ \sigma(\sqrt[3]{3}) = \sqrt[3]{3}$, $\tau(\sqrt{2}) = \sqrt{2}$, $\tau(\sqrt[3]{3}) = \omega\sqrt[3]{3}$ となるものが存在.

これらを用いて $\mathrm{Hom}^{al}_{\mathbb{Q}}(L, \overline{\mathbb{Q}}) = \{id, \tau, \tau^2, \sigma, \sigma\tau, \sigma\tau^2\}$ とかける

このとき $\sqrt{2} + \sqrt[3]{3} \in L$ を考えると

$id(\sqrt{2} + \sqrt[3]{3}) = \sqrt{2} + \sqrt[3]{3}$ $\tau(\sqrt{2} + \sqrt[3]{3}) = \sqrt{2} + \omega\sqrt[3]{3}$, $\tau^2(\sqrt{2} + \sqrt[3]{3}) = \sqrt{2} + \omega^2\sqrt[3]{3}$

$\sigma(\sqrt{2} + \sqrt[3]{3}) = -\sqrt{2} + \sqrt[3]{3}$ $\tau\sigma(\sqrt{2} + \sqrt[3]{3}) = -\sqrt{2} + \omega\sqrt[3]{3}$ $\sigma\tau^2(\sqrt{2} + \sqrt[3]{3}) = -\sqrt{2} + \omega^2\sqrt[3]{3}$

よって 定理 3.7.1 より $L = \mathbb{Q}(\sqrt{2} + \sqrt[3]{3})$ となる.

(3) $\sqrt{5} \notin \mathbb{Q}(\sqrt{2}, \sqrt{3})$ を背理法で示す。

例題 3.1.34 より $\sqrt{5} \in \mathbb{Q}(\sqrt{2}, \sqrt{3})$ とすると $a + b\sqrt{2} + c\sqrt{3} + d\sqrt{6} = \sqrt{5}$ とおける

$(a, b, c, d \in \mathbb{Q})$

有理、無理の条件から $a = 0$ で 両式を2乗した後の無理部分についての条件から

$$2bc\sqrt{6} + 6cd\sqrt{2} + 4bd\sqrt{3} = 0$$

この $\sqrt{6}, \sqrt{2}, \sqrt{3}$ が

$\sqrt{6}, \sqrt{2}, \sqrt{3}$ は線形独立なので $bc = cd = bd = 0$ 線形独立である

よって b, c, d のうち少なくとも2つは 0 である。 ことはいろいろなことを使う

仮に $b = c = 0$ とすると 元の式から $d\sqrt{6} = \sqrt{5}$ 一般に $\mathbb{Q}(\sqrt{m_1}, \sqrt{m_2}, \cdots, \sqrt{m_n})$

$6d^2 = 5$ となり明らかに矛盾 について $[L : \mathbb{Q}]$ が成りそう。

$b \neq 0$, $c \neq 0$ のときも同様に矛盾

したがって $\sqrt{5} \notin \mathbb{Q}(\sqrt{2}, \sqrt{3})$

よって $\mathbb{Q}(\sqrt{2}, \sqrt{3})$ 上の $\sqrt{5}$ の最小多項式の次数は少なくとも2以上

$x^2 - 5$ があるので $[L : \mathbb{Q}(\sqrt{2}, \sqrt{3})] = 2$.

これより $[L : \mathbb{Q}] = 8$ を示せる。

後は (1), (2) と同様に $\sigma(\sqrt{2}) = -\sqrt{2}$, $\sigma(\sqrt{3}) = \sqrt{3}$, $\sigma(\sqrt{5}) = \sqrt{5}$

$\tau(\sqrt{2}) = \sqrt{2}$, $\tau(\sqrt{3}) = -\sqrt{3}$, $\tau(\sqrt{5}) = \sqrt{5}$

$\upsilon(\sqrt{2}) = \sqrt{2}$, $\upsilon(\sqrt{3}) = \sqrt{3}$, $\upsilon(\sqrt{5}) = -\sqrt{5}$

$\sigma, \tau, \upsilon \in \mathrm{Hom}^{al}_{\mathbb{Q}}(L, \overline{\mathbb{Q}})$ が存在し、

$\mathrm{Hom}^{al}_{\mathbb{Q}}(L, \overline{\mathbb{Q}}) = \{id, \sigma, \tau, \upsilon, \sigma\tau, \sigma\upsilon, \upsilon\tau, \sigma\tau\upsilon\}$ とかける。

$\sqrt{2} + \sqrt{3} + \sqrt{5}$ は定理 3.7.1 の条件を満たすので

$$L = \mathbb{Q}(\sqrt{2} + \sqrt{3} + \sqrt{5})$$

最小多項式がそれぞれ $x^2 - t$, $x^2 - (t+1)$ なのは自明かな

(4). $\sqrt{t}$, $\sqrt{t+1}$ の K 上の共役はそれぞれ $\pm\sqrt{t}$, $\pm\sqrt{t+1}$ であるから $|\mathrm{Hom}^{al}_K(L, \overline{K})| \leqq 4$

$L \supset K(\sqrt{t})$ より $[L : K] \geqq 2$.

ここで $\sqrt{t+1} \in K(\sqrt{t})$ とすると $K(\sqrt{t})$ の基底として $\{1, \sqrt{t}\}$ がとれるので

$a, b \in \mathbb{F}_3(t)$ を用いて $\sqrt{t+1} = a + b\sqrt{t}$ とかける

両辺を2乗して整理すると $t + 1 = (a^2 + b^2 t) + 2ab\sqrt{t}$

$\{1, \sqrt{t}\}$ は基底より $a^2 + b^2 t = t + 1$, $2ab = 0$ これを満たす a, b は存在しないので矛盾。

よって $\sqrt{t+1} \notin K(\sqrt{t})$ となり $[L : K] \geqq 4$

ここで L/K は分離拡大より $|\mathrm{Hom}^{al}_K(L, \overline{K})| = 4$ となる

よって $\sigma, \tau \in \mathrm{Hom}^{al}_K(L, \overline{K})$, $\sigma(\sqrt{t}) = -\sqrt{t}$, $\sigma(\sqrt{t+1}) = \sqrt{t+1}$, $\tau(\sqrt{t}) = \sqrt{t}$, $\tau(\sqrt{t+1}) = -\sqrt{t+1}$

となる σ, τ が存在し、 $\mathrm{Hom}^{al}_K(L, \overline{K}) = \{1, \sigma, \tau, \sigma\tau\}$ とかける。 $a^2 = t + 1$

$\sqrt{t} + \sqrt{t+1}$ は定理 3.7.1 の条件を満たすので $2ab = 0$ より $b = 0$ のとき ~~[illegible]~~

$$L = K(\sqrt{t} + \sqrt{t+1})$$

$a = 0$ のとき $b^2 t = t + 1$

☆ $\mathbb{F}_3[t]$ ~~[illegible]~~ はユークリッド環なので、 ~~[illegible]~~ 稲 であるも

$\mathbb{F}_3(t)$ はユークリッド環じゃないので、ここで考える