$\boxed{3.1.8}$ 背理法で示す。 $\sqrt[3]{2} \in \mathbb{Q}(\sqrt[4]{2})$ であるとすると、$\mathbb{Q}(\sqrt[3]{2}) \subset \mathbb{Q}(\sqrt[4]{2})$ となり

$\mathbb{Q}(\sqrt[4]{2})$ は $\mathbb{Q}(\sqrt[3]{2})$ の拡大体となる。

ここで $x^4 - 2$, $x^3 - 2$ はアイゼンシュタインの判定法より $\mathbb{Q}$ 上既約で、

モニックより、$x^4 - 2$, $x^3 - 2$ はそれぞれ $\mathbb{Q}$ 上の $\sqrt[4]{2}$, $\sqrt[3]{2}$ の最小多項式となる。

よって $[\mathbb{Q}(\sqrt[4]{2}) : \mathbb{Q}] = 4$　$[\mathbb{Q}(\sqrt[3]{2}) : \mathbb{Q}] = 3$

故に $4 = [\mathbb{Q}(\sqrt[4]{2}) : \mathbb{Q}(\sqrt[3]{2})] \cdot 3$ となるので矛盾。

したがって $\sqrt[3]{2} \notin \mathbb{Q}(\sqrt[4]{2})$ である。