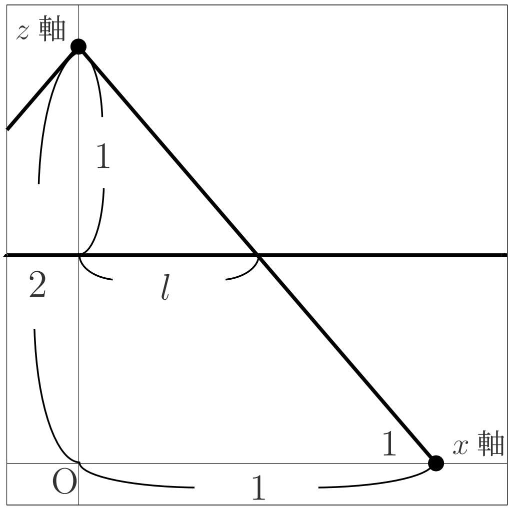
(1)　まず平面 $z=1$ による S の切り口を考える。

円錐 S を平面 $z=1$ で切ったときの切り口が，$z=0$ 上で原点中心の円の内部または周上となることは明らかである。よってその半径の長さ l を求めればよい。xz 平面における右図のような円錐 S の断面図を考えると，l は相似比を用いて，$l=\frac{1}{2}$ とわかる。故に $z=1$ 上における S の切り口の方程式は



$$x^2+y^2 \leqq \frac{1}{4}$$

となる。

次に平面 $z=1$ による T の切り口を考えていく。

そのためにまず，点 P を固定したときの，線分 AP の $z=1$ 上の切り口を考えていく。点 P は S の底面上に存在するので，$0 \leqq r \leqq 1$, $0 \leqq \theta < 2\pi$ を満たす実数 r, θ を用いて $\overrightarrow{\mathrm{OP}}=(r\cos\theta, r\sin\theta, 0)$ とおける。

線分 AP の方程式は，媒介変数 $u\,(0 \leqq u \leqq 1)$ を用いて

$$\begin{aligned}(x,y,z) &= \overrightarrow{\mathrm{OA}}+u\overrightarrow{\mathrm{AP}}\\ &= (1,0,2)+u(r\cos\theta-1, r\sin\theta, -2)\\ &= (u(r\cos\theta-1)+1, ur\sin\theta, -2u+2)\end{aligned}$$

となる。

よって線分 AP の平面 $z=1$ 上での切り口は $-2u+2=1 \Leftrightarrow u=\frac{1}{2}$ より

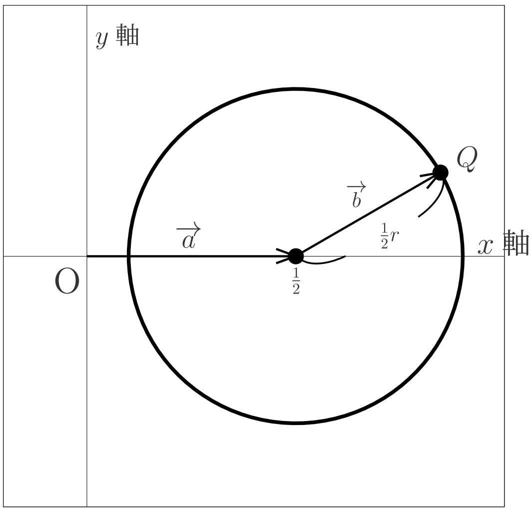
$$\text{点}\ Q\left(\tfrac{1}{2}\,r\cos\theta+\tfrac{1}{2},\tfrac{1}{2}r\sin\theta,1\right)$$

となる。

次に点 P，すなわち r,θ を動かしていく。

平面 $z=1$ 上で考えているので，点 Q を z 座標を省略して書くと

$$\left(\tfrac{1}{2}\,r\cos\theta+\tfrac{1}{2},ur\sin\theta\right)=\underbrace{\left(\tfrac{1}{2}\,,0\right)}_{\overrightarrow{a}}+\underbrace{\tfrac{1}{2}r(\cos\theta,\sin\theta)}_{\overrightarrow{b}}$$



この式より，まず r を固定して，θ を $0\leqq\theta<2\pi$ で動かすと，点 Q は $z=1$ 上で中心 $(\frac{1}{2},0)$，半径 $\frac{1}{2}r$ の円を描く。

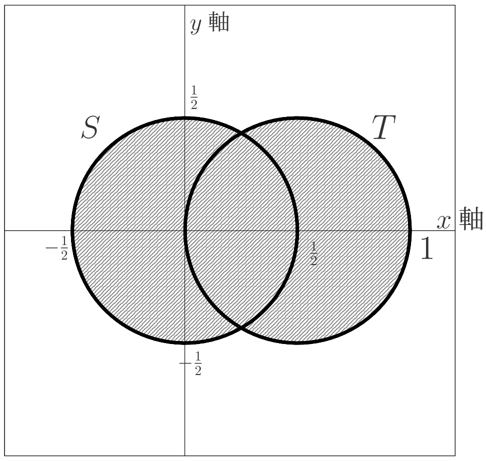
さらに r を $0\leqq r\leqq 1$ で動かすと，$0\leqq\frac{1}{2}r\leqq\frac{1}{2}$ より中心 $(\frac{1}{2},0)$，半径 $\frac{1}{2}$ の円

の内部および周上を描く。

つまり $z=1$ 上における T の切り口の方程式は

$$\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+y^2 \leqq \frac{1}{4}$$

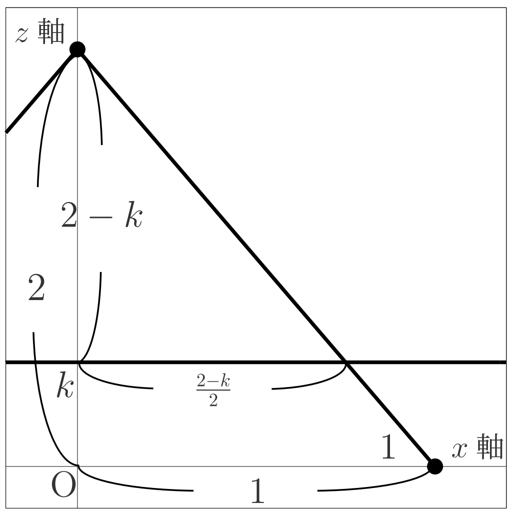
よって求める領域は以上のことから，下図のようになる。



ただし境界線上の点は含む。

(2)　点 P が S を動くとき，線分 AP が通過する部分を T' とする。

(1) と同様に平面 $z=t$(t は実数) による T' の切り口を考えていく。そのためにまず，点 P を固定したときの，線分 AP の $z=t$ 上の切り口を考えていく。条件より線分 AP は $0 \leqq z \leqq 2$ に存在



するので，$0 \leqq t \leqq 2$ で考える。点 P

は S 上に存在するので，$0 \leqq r \leqq \frac{2-k}{2}$,

$0 \leqq \theta < 2\pi$, $0 \leqq k \leqq 2$ を満たす実数 r,

θ, k を用いて $\overrightarrow{\mathrm{OP}} = (r\cos\theta, r\sin\theta, k)$

とおける。

線分 AP の方程式は，媒介変数 $u\,(0 \leqq u \leqq 1)$ を用いて

$$\begin{aligned}(x,y,z) &= \overrightarrow{\mathrm{OA}} + u\overrightarrow{\mathrm{AP}} \\ &= (1,0,2) + u(r\cos\theta - 1, r\sin\theta, k-2) \\ &= (u(r\cos\theta - 1) + 1, ur\sin\theta, u(k-2)+2)\end{aligned}$$

となる。

よって線分 AP の平面 $z = t$ 上での切り口は

$k = 2$ のとき，点 P は (0,0,2) にあるので，平面 $z = 2$ 上で線分

$$\begin{cases} y = 0 \\ 0 \leqq x \leqq 1 \end{cases}$$

を描く。

$k \neq 2$ のときは，$-2(k-2)u + 2 = t \Leftrightarrow u = \frac{2-t}{2-k}$ より

$$\text{点}\ Q'\left(\tfrac{2-t}{2-k}\,r\cos\theta + 1 - \tfrac{2-t}{2-k}, \tfrac{2-t}{2-k}r\sin\theta, t\right)$$

となる。

ただし，$0 \leqq u \leqq 1$ より $0 \leqq \frac{2-t}{2-k} \leqq 1$，すなわち $k \leqq t$ である。

今 r, θ, k の動く範囲を明示すると $0 \leqq r \leqq \frac{2-k}{2}$, $0 \leqq \theta < 2\pi$, $0 \leqq k \leqq t$ であ

る。

次に点 P，すなわち r, θ, k を動かしていく。

平面 $z=t$ 上で考えているので，点 Q' を z 座標を省略して書くと

$$\left(\tfrac{2-t}{2-k}\,r\cos\theta+1-\tfrac{2-t}{2-k}, \tfrac{2-t}{2-k}r\sin\theta\right)=\left(1-\tfrac{2-t}{2-k},0\right)+\tfrac{2-t}{2-k}r(\cos\theta,\sin\theta)$$

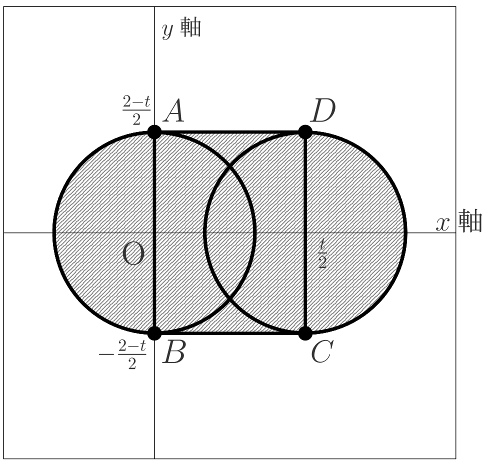
この式より，まず r,k を固定して，θ を $0\leqq\theta<2\pi$ で動かすと，点 Q' は $z=t$ 上で中心 $(1-\frac{2-t}{2-k},0)$，半径 $\frac{2-t}{2-k}r$ の円を描く。

さらに r を $0\leqq r\leqq\frac{2-k}{2}$ で動かすと，$0\leqq\frac{2-t}{2-k}r\leqq\frac{2-t}{2}$ より，中心 $(1-\frac{2-t}{2-k},0)$，半径 $\frac{2-t}{2-k}$ の円の内部および周上を描く。

最後に k を $0\leqq k\leqq t$ で動かすと，$0\leqq\frac{2-t}{2-k}$ より $0\leqq 1-\frac{2-t}{2-k}\leqq\frac{t}{2}$ である。

$k=2$ の場合で求めた切り口も合わせることにより，平面 $z=t(0\leqq t\leqq 2)$ における T' の切り口は半径 $\frac{2-t}{2}$ の円が中心 $(0,0)$ から $(\frac{t}{2},0)$ へ動くときの通過領域となることがわかる。

よって T' の切り口は下の図のようになる。



この断面積 $S(t)$ は

$$
\begin{aligned}
S(t) &= (\text{長方形}\ ABCD) + (\text{半径}\tfrac{2-t}{2}\text{の円}) \\
&= \frac{t(2-t)}{2} + \pi\left(\frac{2-t}{2}\right)^2 \\
&= \frac{t(2-t)}{2} + \frac{\pi}{4}(2-t)^2
\end{aligned}
$$

よって，求める体積 V は

$$
\begin{aligned}
V &= \int_0^2 S(t)dt \\
&= \int_0^2 \left\{\frac{t(2-t)}{2} + \frac{\pi}{4}(2-t)^2\right\}dt \\
&= \frac{1}{2}\cdot\frac{(2-0)^3}{6} + \frac{\pi}{4}\left[-\frac{1}{3}(2-t)^3\right]_0^2 \\
&= \frac{2}{3} + \frac{\pi}{4}\cdot\frac{1}{3}\cdot 2^3 \\
&= \frac{2}{3}(1+\pi)
\end{aligned}
$$

＜コメント＞

今回の問題では LESSON2「切って動かせ」の「動かせ」の部分は，「パラメーター（変数）を変化させること」ことに対応しています。この問題が難しいのは，(1) では動かす変数が r, θ の 2 変数，(2) では r, θ, k の 3 変数を動かすからです。さらに (2) では $z = t$ での平面を考えていますが，この t も変数のようなイメージを持ってしまい，難しく感じてしまうこともあります。しかし (2) は (1) の議論を広げたものだという意識をもつと，かなり解答が書きやすくなります。この解答では，(1) と (2) の解答ができるだけ対

応するように書かれているので，そこを意識してみると (2) は難しく感じにくいと思います。文字が定数としてなのか，変数として扱っているのかを気を付けながら解答を書いていきましょう。また (2) では変数 r, θ, k を動かす順番によっては，描かれる図形がイメージしづらい場合があります。そのため変数の動かす順番にも気をつけましょう。