平面 $y=t$ で切った時の立体 E の切り口について考える。
ただし円板 D_1 が存在する範囲から，平面 $y=t$ 上に立体 E の切り口が存在するためには，$-1\leqq t\leqq 1$ である必要があるので，$-1\leqq t\leqq 1$ の範囲で考える。
円板 D_1の 方程式は $y=t$ 上では

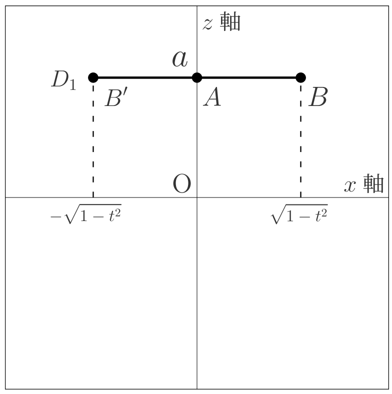
$$\begin{cases} x^2+t^2\leqq 1 \\ z=a \end{cases}$$

すなわち

$$\begin{cases} -\sqrt{1-t^2}\leqq x\leqq \sqrt{1-t^2} \\ z=a \end{cases}$$

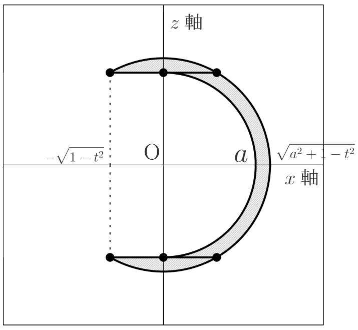
となる。
故に円板 D_1 の切り口は右下図のようになる。

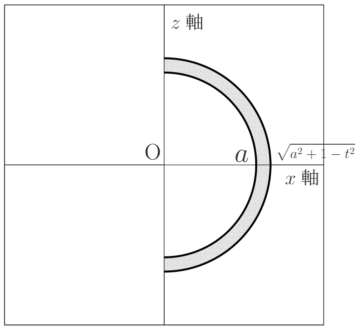
立体 E の切り口は右図の図形を y 軸 中心に 180° 回転させたものである。
ここで, 左の図において y 軸は原点 O に対応し，原点に最も近い点は点 A，最も遠い点は B, B' である。
そして，



$$OA=a$$
$$OB=OB'=\sqrt{(\sqrt{1-t^2})^2+a^2}=\sqrt{a^2+1-t^2}$$

である。
故に，E の切り口は左下図のようになる。
 今求めたいのは $W(a)$ なので，$x\geqq 0$ においての E の切り口は右下図のようになる。





よって，その断面積 $S(t)$ は

$$\begin{aligned} S(t) &= \frac{\pi}{2}\cdot(\sqrt{a^2+1-t^2})^2 - \frac{\pi}{2}\cdot a^2 \\ &= \frac{\pi}{2}(1-t^2) \end{aligned}$$

したがって，求める体積 $W(a)$ は

$$\begin{aligned} V &= \int_{-1}^{1} \frac{\pi}{2}(1-t^2)dt \\ &= \pi\left[1-\frac{1}{3}t^3\right]_0^1 \\ &= \frac{2}{3}\pi \end{aligned}$$

＜コメント＞

例題とは異なり，1 回転ではなく 180° 回転することに注意しましょう。この問題には続きの (2) がありますが，体積の問題というよりも，極限の問題寄りだったので割愛させていただきました。極限に自信がある方は解いてみるのもいいでしょう。