与式によって定まる立体を K，その体積を V とおくと，
立体の対称性より $x \geqq 0, y \geqq 0, z, \geqq 0$ における立体 K の体積は $\dfrac{V}{8}$ となる。
故に $x \geqq 0, y \geqq 0, z \geqq 0$ において考えていく。
平面 $x = t \quad (x \geqq 0$ より $t \geqq 0)$ における立体 K の切り口は，与式より

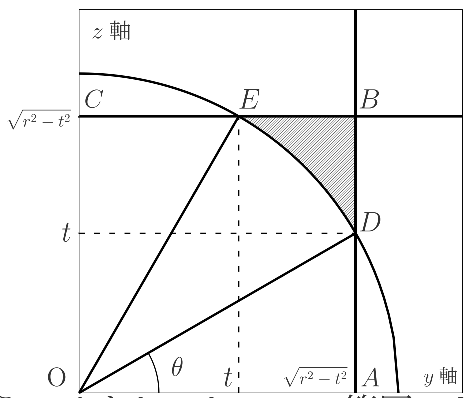
$$\begin{cases} t^2 + y^2 \leqq r^2 \\ y^2 + z^2 \geqq r^2 \\ z^2 + t^2 \leqq r^2 \end{cases}$$

を満たす，(y, z) がなす図形である。
ここで $t^2 + y^2 \leqq r^2$で $y^2 \geqq 0$ であるので，上の式を満たす (y, z) が存在するには $t^2 \leqq r^2$である必要がある。
よって平面 $x = t$ において立体 K の切り口が存在するには少なくとも $0 \leqq t \leqq r$ である必要がある。
グラフが描きやすいように整理すると

$$\begin{cases} -\sqrt{r^2 - t^2} \leqq y \leqq \sqrt{r^2 - t^2} \\ y^2 + z^2 \geqq r^2 \\ -\sqrt{r^2 - t^2} \leqq z \leqq \sqrt{r^2 - t^2} \end{cases}$$

よって，平面 $x = t$ における立体 K の切り口は下図のようになる。
この図より，平面 $x = t$ 上で立体 K の切り口が存在するには，$r \leqq \sqrt{2}\sqrt{r^2 - t^2}$となればよいことがわかる。
t について整理すると，t は

$$0 \leqq t \leqq \frac{r}{\sqrt{2}}$$



であればよいことがわかる。図のように θ をとると，この範囲において，立体 K の断面積 $S(t)$ は

$$
\begin{aligned}
S(t) =&(\text{正方形}\,OABC) - 2\times(\text{三角形}\,OAD) - (\text{おうぎ形}\,ODE)\\
=&(\sqrt{r^2-t^2})^2 - 2\times\frac{1}{2}\sqrt{r^2-t^2}\cdot t - \frac{1}{2}r^2\left(\frac{\pi}{2}-2\theta\right)\\
=&r^2-t^2-t\sqrt{r^2-t^2}+r^2\left(\theta-\frac{\pi}{4}\right)
\end{aligned}
$$

故に，求める体積 V について

$$
\begin{aligned}
\frac{V}{8} &= \int_0^{\frac{r}{\sqrt{2}}}\left\{r^2-t^2-t\sqrt{r^2-t^2}+r^2\left(\theta-\frac{\pi}{4}\right)\right\}dt\\
&= \int_0^{\frac{r}{\sqrt{2}}}\left\{\left(1-\frac{\pi}{4}\right)r^2-t^2-t\sqrt{r^2-t^2}+r^2\theta\right\}dt\\
&= \underbrace{\int_0^{\frac{r}{\sqrt{2}}}\left\{\left(1-\frac{\pi}{4}\right)r^2-t^2-t\sqrt{r^2-t^2}\right\}dt}_{I_1}+r^2\underbrace{\int_0^{\frac{r}{\sqrt{2}}}\theta dt}_{I_2}
\end{aligned}
$$

ここで，

$$
\begin{aligned}
I_1 =&\left[\left(1-\frac{\pi}{4}\right)r^2t-\frac{1}{3}\cdot t^3+\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}(r^2-t^2)^{\frac{3}{2}}\right]_0^{\frac{r}{\sqrt{2}}}\\
=&\left(1-\frac{\pi}{4}\right)\frac{r^3}{\sqrt{2}}-\frac{r^3}{6\sqrt{2}}+\frac{1}{3}\left(r^2-\frac{r^2}{2}\right)^{\frac{3}{2}}-\frac{1}{3}r^{2\cdot\frac{3}{2}}\\
=&\left(1-\frac{\pi}{4}\right)\frac{r^3}{\sqrt{2}}-\frac{r^3}{6\sqrt{2}}+\frac{r^3}{6\sqrt{2}}-\frac{1}{3}r^3\\
=&\left(\frac{1}{\sqrt{2}}-\frac{1}{3}-\frac{\pi}{4\sqrt{2}}\right)r^3
\end{aligned}
$$

I_2については図より $t = r\sin\theta$ であり，$dt = r\cos\theta d\theta$ であるので

$$
\begin{aligned}
I_2 =& r^2 \int_0^{\frac{\pi}{4}} \theta \cdot r\cos\theta d\theta \\
=& r^3 \Big[\theta\sin\theta + \cos\theta\Big]_0^{\frac{\pi}{4}} \\
&= r^3\left(\frac{\pi}{4}\cdot\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}} - 1\right) \\
&= r^3\left(\frac{\pi}{4\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}} - 1\right)
\end{aligned}
$$

したがって V は

$$
\begin{aligned}
V =& 8(I_1 + I_2) \\
=& 8\left(\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{3} - \frac{\pi}{4\sqrt{2}} + \frac{\pi}{4\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}} - 1\right)r^3 \\
=& 8\left(\frac{2}{\sqrt{2}} - \frac{4}{3}\right)r^3 \\
=& \left(8\sqrt{2} - \frac{32}{3}\right)r^3
\end{aligned}
$$

＜コメント＞

今回の問題では平面 $x = t$ で切りました。記事で解説した「最高次かつ再頻出」の法則で考えると x, y, z の次数も頻出度合も同じなので，どれで切ってもよいことになります。しかし実際やってみると，他の平面で切った場合，積分区間の場合分けが必要になり，平面 $x = t$ で解くのが一番楽だとわかります。なぜ $x = t$ が一番楽なのかというと，かなり感覚的ですが，$x = t$ で切ると与式のきれい度合が損なわれにくいからです。それは与式で x が入っている式は不等号が $\leqq$，そうでないときは $\geqq$ になっていることによります。

ちなみに最初のように，立体の対称性を使って考える範囲を小さくする方針は，よく使われるので身に付けておきましょう。ここでの対称性の議論を

もう少し詳しく説明すると，$(-x)^2 = x^2$ であることを利用すると与式から，立体 K が yz 平面に関して対称であることが分かります。同様にして xy, zx 平面に関しても対称であることが分かるので，求める立体の体積 V は立体 K の $x \geqq 0, y \geqq 0, z, \geqq 0$ における体積の 8 倍になることが分かるというわけです。入試答案上では，ここまで詳しく書く必要はないので「対称性より」で済ませましょう。