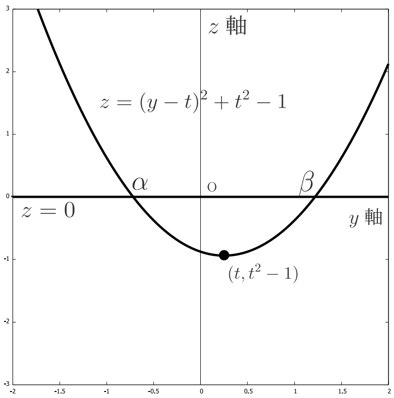
$$x^2+(y-x)^2-z=1 \tag{1}$$
$$z=0 \tag{2}$$

立体 K を平面 $x=t$（t は実数）で切ったときの切り口を考える。
平面 $x=t$ において (1) は

$$\begin{aligned} t^2+(y-t)^2-z&=1 \\ z&=(y-t)^2+t^2-1 \qquad \text{となるので} \end{aligned}$$

平面 $x=t$ における曲面 (1), 平面 (2) の切り口は下図のようになる。



平面 $x=t$ 上で立体 K の切り口が存在するには，(1) と (2) の曲線に囲まれる部分が存在しなければならない。図より囲まれる部分が存在するための条件は，放物線 $z=(y-t)^2+t^2-1$ の頂点 (t,t^2-1) が直線 $z=0$ 以下に位置することである。
よって，平面 $x=t$ において立体 K の切り口が存在する条件は

$$t^2-1 \leqq 0 \qquad \text{すなわち} \qquad -1 \leqq t \leqq 1$$

この範囲において，立体 K の断面積 $S(t)$ は上図のように平面 $x=t$ 上の (1) と (2) の共有点を $\alpha,\beta(\alpha \leqq \beta)$ とおくと

$$\begin{aligned} S(t)&=\int_\alpha^\beta \{0-(y-t)^2-t^2+1\}dy \\ &=\frac{(\beta-\alpha)^3}{6} \qquad \text{（※ 6 分の 1 公式より）} \end{aligned}$$

ここで，α,β は $(y-t)^2+t^2-1=0$ の 2 つの解,
すなわち，$\alpha=t-\sqrt{1-t^2}, \beta=t+\sqrt{1-t^2}$ なので,

$$\beta - \alpha = 2\sqrt{1-t^2}$$

故に

$$\begin{aligned} S(t) &= \frac{8(1-t)^{\frac{3}{2}}}{6} \\ &= \frac{4}{3}(1-t^2)^{\frac{3}{2}} \end{aligned}$$

したがって，求める体積 V は

$$\begin{aligned} V &= \int_{-1}^{1} \frac{4}{3}(1-t^2)^{\frac{3}{2}} dt \\ &= \frac{8}{3}\int_{0}^{1} (1-t^2)^{\frac{3}{2}} dt \end{aligned}$$

ここで $t = \sin\theta$ として置換積分を行うと

$$\begin{aligned} V &= \frac{8}{3}\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} (1-\sin^2\theta)^{\frac{3}{2}} \cos\theta d\theta \\ &= \frac{8}{3}\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \cos^3\theta \cdot \cos\theta d\theta \\ &= \frac{8}{3}\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \cos^4\theta d\theta \\ &= \frac{8}{3}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{2} \qquad \text{（※ウォリス積分より）} \\ &= \frac{\pi}{2} \end{aligned}$$